



Modélisation analytique et simulation numérique de la nucléation et de la propagation de la fissure cohésive couplée avec la plasticité

Tuan Hiep Pham

► To cite this version:

Tuan Hiep Pham. Modélisation analytique et simulation numérique de la nucléation et de la propagation de la fissure cohésive couplée avec la plasticité. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLX001 . tel-01305931

HAL Id: tel-01305931

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01305931>

Submitted on 22 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

DE

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

PRÉPARÉE À

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE DOCTORALE N°579

SMEMaG - Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux, géosciences

Spécialité de doctorat “Génie Mécanique”

Par

Tuan-Hiep PHAM

Modélisation analytique et simulation numérique de la nucléation et la propagation de la fissure cohésive couplée avec la plasticité

Thèse présentée et soutenue à l'École Polytechnique, le 8 Janvier 2016

COMPOSITION DU JURY

M. Yann MONERIE,	Professeur,	Rapporteur
M. Radhi ABDELMOULA,	Maître de Conférence,	Rapporteur
M. Frédéric LEBON,	Professeur,	Président du Jury
M. Éric LORENTZ,	HDR,	Examineur
M. Jean-Jacques MARIGO,	Professeur,	Directeur de thèse
M. Jérôme LAVERNE,	Ingénieur de Recherche,	Co-encadrant de thèse

Table des matières

Introduction générale	1
1 Initiation et propagation de la fissure cohésive couplée avec la plasticité	5
1.1 Introduction	6
1.1.1 Du modèle classique de la mécanique de la rupture à l'approche variationnelle	6
1.1.2 Minimisation locale d'énergie - Modèles de zone cohésive	7
1.1.3 Modèles de plasticité	8
1.1.4 Couplage entre la plasticité et la mécanique de la rupture	9
1.2 Étude d'une barre unidimensionnelle sous traction	10
1.2.1 Comportement élastoplastique de la barre, loi cohésive et chargement . . .	10
1.2.2 Formulations énergétiques	12
1.2.3 Condition de stabilité locale d'ordre 1	14
1.2.4 Condition de stabilité locale d'ordre 2	15
1.3 Formulations du cas tridimensionnel	24
1.3.1 Comportement élastoplastique de la structure tridimensionnelle et formu- lation énergétique	24
1.3.2 Condition de stabilité locale d'ordre 1	28
1.3.3 Condition de stabilité locale d'ordre 2	32
1.4 Conclusion du chapitre	36
2 Effets du champ de contrainte non-uniforme	39
2.1 Introduction	40
2.1.1 Nucléation de fissure et stabilité de l'évolution de fissure utilisant le modèle de zone cohésive	40
2.1.2 Nucléation et propagation de fissure à partir d'un point régulier	42
2.2 Description du problème et hypothèses	42
2.2.1 La structure, son comportement élastique et le chargement	42
2.2.2 Symétrie et hypothèses de régularité	44
2.2.3 La loi cohésive de type Dugdale	45
2.2.4 Formulations de l'approche variationnelle de l'évolution de fissure	46
2.3 Résolution du problème d'évolution de fissure	49
2.3.1 Réduction du problème avec les hypothèses de symétrie	49
2.3.2 Calculs analytiques avec l'approche à deux échelles	52

2.3.3	Représentation des trois branches	58
2.3.4	Discussion	60
2.3.5	Comparaison avec le modèle de Griffith	66
2.4	Généralisation du problème par la série de distribution de contrainte normale . .	68
2.4.1	Calculs analytiques avec l'approche à deux échelles	69
2.4.2	Représentation des trois branches dans des cas particuliers	73
2.5	Généralisation du problème avec la loi cohésive de type Barenblatt	81
2.5.1	La loi cohésive de type Barenblatt	82
2.5.2	Formulation des calculs avec l'approche à deux échelles du cas général de la loi cohésive de type Barenblatt	84
2.5.3	Cas particulier de la loi cohésive linéaire de type Barenblatt	88
2.6	Conclusion du chapitre	95
2.A	Le problème local général et sa résolution par l'analyse complexe	97
3	Mise en œuvre numérique dans <i>Code_Aster</i>	99
3.1	Introduction des modèles numériques	100
3.1.1	Méthode de Lagrangien augmenté pour les éléments cohésifs d'interface .	100
3.1.2	Méthode du pilotage du chargement	103
3.2	Initiation et propagation de fissure cohésive en mode mixte	104
3.2.1	Post-traitement - Critère d'amorçage cohésif multidimensionnel	104
3.2.2	Propagation de fissure cohésive en mode mixte au sein du matériau élastique	110
3.3	Effets de la contrainte non-uniforme	118
3.3.1	Branche élastique	120
3.3.2	Branche purement cohésive	121
3.3.3	Branche partiellement non cohésive	123
3.4	Conclusion du chapitre	123
4	Cas d'application industriel	125
4.1	Introduction	126
4.2	Essais expérimentaux	127
4.2.1	Description de la maquette de grandes dimensions	127
4.2.2	Installation de l'essai de flexion 4 points	127
4.2.3	Réponse globale de la maquette	128
4.3	Simulation numérique utilisant le modèle de zone cohésive	130
4.3.1	Maillage avec éléments cohésifs d'interface	130
4.3.2	Mise en œuvre de la simulation numérique	130
4.3.3	Résultats de la simulation numérique	131
4.4	Conclusion du chapitre	134
	Conclusion et Perspectives	141

Liste des figures

1.1	Barre unidimensionnelle sous chargement en déplacement imposé	10
1.2	Densité d'énergie surfacique de fissure cohésive en fonction dusaut de déplacement	12
1.3	La réponse globale de la barre $F(U)$ dans les cas stable et instable avec un seul point de discontinuité	24
1.4	Trois configurations possibles des critères de plasticité et de zone cohésive dans le plan des contraintes lorsque $\phi(\llbracket u_n \rrbracket, \llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket)$ est différentiable à l'origine	32
1.5	Trois configurations possibles des critères de plasticité et de zone cohésive dans le plan des contraintes lorsque $\phi(\llbracket u_n \rrbracket, \llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket)$ est seulement directionnellement différentiable à l'origine	33
2.1	La structure et le chargement appliqué	43
2.2	Densité d'énergie surfacique et contrainte cohésive dans le modèle cohésif de Dugdale	46
2.3	Trois types possibles de l'état de fissure : (i) sans fissure, (ii) fissure purement cohésive, (iii) fissure partiellement non-cohésive	50
2.4	Dépendance typique de a , b et t à $\alpha = b/a$. Ces courbes correspond au cas où $d_c/\ell = 0.1$	60
2.5	Le graphe typique des trois branches sur le diagramme (t, a) . La courbe grise représente l'évolution de la pointe de la zone non-cohésive b pour la branche partiellement non-cohésive. Ces courbes correspondent au cas où $d_c/\ell = 0, 1$	61
2.6	Dépendance des branches d'évolution de fissure à la longueur caractéristique du matériau $d_c = \epsilon \ell$ pour la longueur caractéristique de gradient de contrainte ℓ fixée	62
2.7	Dépendance des branches d'évolution de fissure à la longueur caractéristique de gradient de contrainte $\ell = d_c/\epsilon$ pour la longueur caractéristique du matériau d_c .	63
2.8	Évolution de la longueur de la fissure sous un chargement croissant monotonement dans le cas où $d_c/\ell = 0, 1$. Le saut de la longueur de la fissure a lieu à l'instant $t = t_i$	64
2.9	Évolution de la longueur de fissure a sous un chargement croissant monotonement pour différentes valeurs a_0 de la fissure non-cohésive centrée initiale. Ici, $d_c/\ell = 0, 1$ and $a_0 = 0; d_c/2; d_c; 2d_c; 4, 15 d_c; 6 d_c$	66
2.10	Comparaison entre les branches de Dugdale les celles de Griffith pour $\epsilon = d_c/\ell = 0, 1$. En noir, la réponse associée au modèle de Griffith sous un chargement croissant monotonement lorsque la structure contient une fissure initiale de m-longueur $a_0 < a_G$	68

2.11	Dépendance typique de a , b et t à $\alpha = b/a$. Ces courbes correspondent au cas où $d_c/\ell = 0, 1$	77
2.12	Le graphe typique des trois branches sur le diagramme (t, a) . La courbe grise représente l'évolution de la pointe de la zone non-cohésive b pour la branche partiellement non-cohésive. Ces courbes correspondent au cas où $d_c/\ell = 0, 1$	78
2.13	Dépendance des branches d'évolution de fissure à la longueur caractéristique du matériau $d_c = \epsilon \ell$ pour la longueur caractéristique de gradient de contrainte ℓ fixée	79
2.14	Dépendance des branches d'évolution de fissure à la longueur caractéristique de gradient de contrainte $\ell = d_c/\epsilon$ pour la longueur caractéristique du matériau d_c	80
2.15	Évolution de la longueur de la fissure sous un chargement croissant monotonement dans le cas où $d_c/\ell = 0, 1$. Le saut de la longueur de la fissure a lieu à l'instant $t = t_i$	81
2.16	Évolution de la longueur de fissure a sous un chargement croissant monotonement pour différentes valeurs a_0 de la fissure non-cohésive centrée initiale. Ici, $d_c/\ell = 0, 1$ and $a_0 = 0; d_c/2; d_c; 2d_c; 4, 6, 5 d_c$	82
2.17	Densité d'énergie surfacique et contrainte cohésive dans le modèle cohésif de Barenblatt	83
2.18	Le saut de déplacement adimensionné de la fissure purement cohésive de type Barenblatt correspondant aux différentes valeurs de $\lambda = 0; 0, 2; 1; 2$ en comparant avec le cas de Dugdale (courbe noire)	93
3.1	Discretisation par élément fini d'interface	103
3.2	Critère d'initiation de fissure cohésive sous la forme d'une courbe intrinsèque du matériau	106
3.3	Géométries de deux éprouvettes axisymétriques entaillées, éprouvette AE1 à gauche et éprouvette AE2 à droite	107
3.4	Loi de puissance de comportement d'élastoplastique	109
3.5	Post-traitement - Visualisation sur les EAE (zone rouge)-critère d'amorçage violé, (zone verte)-plastification, (zone bleue)-purement élastique)	110
3.6	Schéma de l'intersection de deux droites dans (3.22)	114
3.7	Schéma du cas test d'arrachement d'une armature rigide	117
3.8	Relation entre le saut tangentiel de déplacement et la composante tangentielle de contrainte cohésive	119
3.9	Fonction de chargement appliqué sur AB	120
3.10	Maillage régulier de la structure avec une zone des éléments cohésifs d'interface posée sur la ligne de symétrie	121
3.11	Distribution de la contrainte normale le long de l'axe $x_2 = 0$ et la fonction quadratique approximative	122
3.12	Évolution de la longueur de la fissure	123
3.13	Profils du saut de déplacement le long de la fissure correspondant à quatre instants choisis donnés par la simulation avec <i>Code_Aster</i> en comparant avec la solution analytique	124
4.1	Maquette MU-3 avec son tronçon central revêtu en paroi interne	128

Liste des figures

4.2	Installation de l'essai de flexion 4 points sur la maquette et évolution du défaut au sein du tuyau	129
4.3	Réponse globale force appliquée-ouverture de fissure au cours d'essai	130
4.4	Maillage de la maquette MU3 avec la couche d'éléments cohésifs d'interface . . .	131
4.5	Loi cohésive de type trapèze	132
4.6	Champ de déplacement selon Y et fond de fissure au sein de la structure dans la phase de propagation radiale	133
4.7	Évolution de la couche d'éléments cohésifs déformée dans la phase de propagation radiale de fissure	136
4.8	Configuration des zones élastiques (bleues)-plastifiées (rouges) et le champ de déformation plastique cumulée	137
4.9	Réponse globale force appliquée - ouverture de fissure au cours de la simulation en comparant avec l'essai expérimental	138
4.10	Fissure au sein de la structure dans la phase de propagation circonférentielle (la couleur correspond au déplacement selon Y, cf. figure 4.6)	138
4.11	Évolution de la couche d'éléments cohésifs déformée dans la phase de propagation circonférentielle de fissure	139
4.12	Réponse globale force appliquée - ouverture de fissure au cours de la simulation en comparant avec l'essai expérimental	140

Introduction générale

L'enjeu industriel important des études de nocivité chez EDF concerne la sûreté des installations et des moyens de production dans le cadre de son activité de production d'électricité. Une meilleure compréhension des phénomènes de fissuration permet à l'entreprise de mieux appréhender les risques et les marges de dimensionnement associés au moment de la construction des ouvrages et également tout au long de leur vie. En plus, l'extension de la durée de fonctionnement des tranches du parc nucléaire de 40 ans à 60 ans nécessite d'appréhender la nocivité de défaut en service en revisitant des méthodes mécaniques existantes et en proposant des approches plus représentatives des phénomènes physiques. Les effets liés au vieillissement (irradiation, thermique, etc.) et à l'évolution des caractéristiques variées des matériaux peuvent conduire à des critères de nocivité plus restrictifs que EDF doit justifier auprès de l'Autorité de Sûreté Nucléaire (ASN). Outre les conséquences sur les marges de dimensionnement, cela peut amener l'entreprise à adapter les stratégies d'inspection. Par ailleurs, le suivi des évolutions réglementaires et des demandes de l'ASN sur les hypothèses à considérer sur les défauts constituent également un enjeu important. Ces travaux sont liés à l'évolution des méthodes, des pratiques de l'ingénierie et des données d'entrée utiles pour les études de justification de l'aptitude des composants à assurer leur fonction. Dans ce domaine, EDF se doit d'être vigilant afin d'accompagner les évolutions réglementaires et y participer en utilisant les résultats scientifiques les plus avancés. Ces derniers sont le plus souvent portés par la R&D et ont pour but de rendre compte de façon plus réaliste des différents phénomènes mécaniques, thermiques, dynamiques, etc. Les études avancées permettent également de caractériser le conservatisme des approches codifiées. Les résultats des études avancées de R&D sont plutôt appliqués sur les parcs nucléaires existants. L'objectif principal de ces études est de justifier de la poursuite de l'exploitation des installations avec l'évolution des caractéristiques des matériaux, en particulier la ténacité, dont la marge de sécurité ne peut plus être justifiée par les méthodes codifiées. Par conséquent, les nouveaux modèles, qui sont toujours conservatifs mais plus physiques et nous permettent de gagner la marge de sécurité, doivent être proposés et étudiés.

Plusieurs composants du parc nucléaire peuvent être concernés par la mécanique de la rupture au regard des domaines dont ils relèvent (ruine plastique, rupture fragile, rupture ductile) et au regard de la complexité des études de nocivité qu'ils nécessitent. Par exemple, les viroles du cœur de la cuve se fragilisent au cours du temps avec l'irradiation tandis qu'en fonctionnement nominal, on reste bien dans le domaine ductile. Certains transitoires thermomécaniques peuvent conduire à vérifier l'intégrité de la cuve dans le domaine fragile. Des études ont été menées depuis de nombreuses années pour mettre en évidence certains effets bénéfiques sur le risque à

l'amorçage liés à ce type de transitoire thermomécanique, tels que l'effet de pré-chargement à chaud («WPS : Warm Pre-Stressing» en anglais), l'effet de petits défauts. D'autres études ont été engagées pour étudier l'effet des zones ségréguées qui sont localement fragiles ou encore pour évaluer la stabilité et la longueur d'une fissure propagée. De nombreux calculs sont également menés pour le développement d'un modèle de passage non empirique de la résilience à la ténacité. Par ailleurs, d'autres composants, dont les plaques de partition de générateur de vapeur, sont fortement plastifiés lors des épreuves hydrauliques. Plusieurs modes de ruine peuvent intervenir, dont la déchirure ductile ou la ruine plastique. Il est nécessaire de discriminer lequel de ces deux mécanismes est en jeu en fonction du type de défaut. L'utilisation des approches critères permet de fournir des justifications supplémentaires aux approches codifiées d'analyse limite mais présente des limitations essentielles en présence de plastification importante. Ainsi, une modélisation fine de la rupture ductile est nécessaire. D'autres composants du parc admettent un amorçage de fissure en ductile suivi d'une propagation de celle-ci en fragile. Ce type de rupture est nommé transition ductile-fragile. Du fait que le domaine de la transition est difficile à rendre compte, et par souci de conservatisme, le matériau est considéré comme fragile. Des travaux de R&D au sein du groupe d'EDF ont pour but principal de faciliter les études de nocivité de défaut et de maîtriser le phénomène de fissuration couplé avec d'autres phénomènes complexes, dont la dissipation plastique, les effets d'échelle, les évolutions dynamiques.

En se basant sur le modèle de zone cohésive proposé premièrement par [Dugdale, 1960] et [Barenblatt, 1962], l'objectif de cette thèse est d'apporter des modélisations analytiques et des simulations numériques de la fissuration fiable et robuste concernant deux phénomènes mécaniques particuliers importants, dont *le couplage fissuration-plasticité* et *les effets de la non-uniformité du champ de contrainte sur la nucléation de fissure*. Ces deux piliers s'appuient sur des bases théoriques solides en gardant une description macroscopique des phénomènes. D'une part, les formulations variationnelles unidimensionnelles et multidimensionnelles avec les dissipations d'énergie par fissuration cohésive et par plasticité permettent de fournir des résultats analytiques intéressants et de premiers résultats numériques prometteurs. D'autre part, les calculs analytiques utilisant l'approche à deux échelles et l'analyse complexe apportent une réponse originale et détaillée sur les effets du champ de contrainte non uniforme dans plusieurs cas de figure de fissuration. Ces travaux de thèse sont présentés de la façon suivante.

Dans le premier chapitre, on construit les formulations énergétiques en prenant en compte le couplage entre la fissuration adoptant les hypothèses de zone cohésive de [Barenblatt, 1962] et la plasticité de type Von-Mises. Les résultats obtenus dans [Charlotte et al., 2000; Charlotte et al., 2006] sont généralisés en présence de la plasticité. Les conditions de stabilité locale d'énergie nous permettent de réunir l'équilibre, les critères de plasticité et d'amorçage de fissure cohésive, ainsi que la stabilité de la solution dans un formalisme énergétique unique. La réponse de la barre élastoplastique unidimensionnelle sous traction avec la présence de fissure est abordée entièrement. L'effet d'échelle est mis en évidence par l'introduction d'une longueur critique L_c de la barre au delà de laquelle la solution au seuil cohésif est instable. On démontrera également que la plasticité n'influence pas la longueur critique L_c qui ne dépend que du module de Young et de la dérivée seconde à l'origine de la densité d'énergie de fissuration. L'approche variationnelle est également établie pour le problème généralisé multidimensionnel. Ainsi, on pourra exprimer les

critères de plasticité et d’amorçage cohésif sous la forme de courbes dans le plan des contraintes de Mohr. La comparaison de ces deux critères est présentée et discutée dans certains cas particuliers. L’effet de la triaxialité des contraintes sur l’amorçage de fissure cohésive à partir de la structure saine sera mis en évidence.

Le deuxième chapitre présente les résultats analytiques originaux concernant les effets du gradient du champ de contrainte sur la nucléation de fissure au sein de structures bidimensionnelles de comportement purement élastique. La non-uniformité de contrainte, associée à une longueur caractéristique ℓ , a un effet de stabilisation sur l’évolution de fissure. La fissure cohésive adopte les hypothèses de Dugdale dans un premier temps et de Barenblatt dans un deuxième temps. On distingue deux phases de l’évolution de la fissure : une première phase où toute la fissure est soumise à des forces cohésives, suivie d’une seconde phase où une zone libre de contrainte est présente au centre de la fissure. En supposant que la longueur caractéristique d_c du modèle cohésif est beaucoup plus petite que les dimensions du domaine, l’approche à deux échelles peut être utilisée. Les solutions analytiques complètes de fissure cohésive de type Dugdale et semi-analytiques de celle de type Barenblatt sont mises en évidence. En particulier, on montrera que l’évolution de fissure est stable dans un premier temps puis instable avec un saut brutal de la longueur de fissure dès que la zone libre de contrainte apparaît. Cette évolution se traduit par la présence d’un snap-back sur la courbe chargement-longueur de fissure. La sensibilité de la solution à la taille de l’imperfection préexistante pourra être également exploitée.

Dans le troisième chapitre, l’implémentation numérique et la validation des résultats analytiques par des simulations numériques sont présentées. La courbe cohésive intrinsèque est mise en œuvre dans *Code_Aster* pour étudier l’initiation et la propagation de fissure cohésive en mode mixte au sein du matériau élastoplastique. Les calculs d’implémentation s’appuyant sur la méthode énergétique de lagrangien augmenté sont détaillés. L’effet de la triaxialité de contrainte sur la position du site d’amorçage est mis en discussion. Les résultats présentés dans [Lorentz, 2008] se basant sur le modèle cohésif de type [Talon et Curnier, 2003] sont généralisés en prenant en compte deux contraintes critiques distinguées (σ_c, τ_c). Par ailleurs, la simulation numérique sur une structure bidimensionnelle nous permet de valider des résultats analytiques du chapitre précédent.

Dans le dernier chapitre, on s’intéresse à un essai de déchirure sur un tronçon de tuyauterie de composant de centrale nucléaire sollicité en flexion 4 points. Ce tronçon est en acier ferritique revêtement d’acier inoxydable en paroi interne. Cette maquette comporte un défaut semi-elliptique circonférentiel débouchant en paroi interne. La sollicitation en flexion fait propager la fissure radialement jusqu’au percement de la paroi externe, puis la propagation continue circonférentiellement jusqu’à un point critique où la rupture est brutale. On utilise le modèle cohésif pour simuler les différentes phases de la propagation du défaut. La mise en place des éléments cohésifs d’interface dans le maillage et le choix des paramètres cohésifs ont pour but de fournir la réponse globale force appliquée-ouverture de fissure la plus proche des résultats d’essai. En comparant avec des modèles des autres équipes de recherche, on met en évidence de premiers résultats encourageants, des avantages et également des difficultés de l’utilisation de l’approche cohésive dans l’ingénierie.

Chapitre 1

Initiation et propagation de la fissure cohésive couplée avec la plasticité

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.1.1	Du modèle classique de la mécanique de la rupture à l'approche variationnelle	6
1.1.2	Minimisation locale d'énergie - Modèles de zone cohésive	7
1.1.3	Modèles de plasticité	8
1.1.4	Couplage entre la plasticité et la mécanique de la rupture	9
1.2	Étude d'une barre unidimensionnelle sous traction	10
1.2.1	Comportement élastoplastique de la barre, loi cohésive et chargement .	10
1.2.2	Formulations énergétiques	12
1.2.3	Condition de stabilité locale d'ordre 1	14
1.2.4	Condition de stabilité locale d'ordre 2	15
1.3	Formulations du cas tridimensionnel	24
1.3.1	Comportement élastoplastique de la structure tridimensionnelle et formulation énergétique	24
1.3.2	Condition de stabilité locale d'ordre 1	28
1.3.3	Condition de stabilité locale d'ordre 2	32
1.4	Conclusion du chapitre	36

Objectifs du chapitre

En se basant sur l'approche variationnelle et le critère de stabilité locale présentés dans [Francfort et Marigo, 1998] et [Del Piero, 1999], le chapitre a pour but d'étudier analytiquement les effets de la plasticité sur la nucléation et la propagation de la fissure cohésive. Afin d'aborder ce but, on construit dans ce chapitre les formulations en implémentant l'énergie dissipée par la plasticité et la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive dans le potentiel d'énergie total. L'évolution de la fissure cohésive couplée avec la plasticité dépend du rapport entre la

contrainte critique σ_c du modèle de zone cohésive et la contrainte critique σ_y du comportement de plasticité (ou dans le cas général tridimensionnel, entre la courbe cohésive intrinsèque et la zone limite d'élasticité dans le plan des contraintes). Cela conduit à deux scénarios possibles, soit l'évolution de la fissure cohésive en absence de plasticité, soit la phase élastoplastique suivie de l'évolution de la fissure cohésive. Le premier est identique au cas de la fissure cohésive au sein d'une structure fragile purement élastique étudié dans [Charlotte et al., 2000; Charlotte et al., 2006]. Dans le second, on étudie les influences de la plasticité sur l'amorçage et la propagation de la fissure cohésive en utilisant le concept de minimisation locale d'énergie. Tout d'abord, les critères d'amorçage de la fissure à partir de la structure saine et de propagation de fissure sont formulés grâce à la condition de stabilité locale d'ordre 1. Par la suite, la stabilité des solutions sont étudiée grâce à la condition de stabilité locale d'ordre 2. Cette dernière nous permet de mettre en évidence des effets d'échelle, en particulier la longueur critique de la barre unidimensionnelle sous déplacement imposé à l'extrémité.

1.1 Introduction

1.1.1 Du modèle classique de la mécanique de la rupture à l'approche variationnelle

Depuis longtemps, le modèle présenté dans [Griffith, 1920] est le modèle le plus utilisé dans la mécanique de la rupture grâce à sa simplicité concernant le comportement du matériau. Ce modèle est basé sur le concept du taux restitution d'énergie G et ainsi le critère de propagation de fissure s'écrit sous la forme $G \leq G_c$, où G_c dénote la valeur critique du taux de restitution d'énergie relié à la ténacité du matériau. Dans le cas de l'évolution régulière (*i.e.* au moins continue) de la fissure, le modèle de Griffith peut s'écrire sous une forme plus synthétique de la *loi-G* («G-law» en anglais), voir [Marigo, 2010].

Définition 1 (loi-G). *Une fonction continue $t \mapsto \ell(t)$ satisfait (ou est la solution de) la loi-G dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ avec la condition initiale $\ell(t_0) = \ell_0$ (où ℓ_0 est une longueur admissible de la fissure) si les trois propriétés suivantes sont validées*

1. **Irréversibilité** : $t \mapsto \ell(t)$ n'est pas décroissante
2. **Critère du taux de restitution d'énergie** : $G(t, \ell(t)) \leq G_c \ \forall t \in [t_0, t_1]$
3. **Balance d'énergie** : $\ell(t)$ est strictement croissante lorsque $G(t, \ell(t)) = G_c$

Néanmoins, ce critère classique présente des lacunes importantes lors de la considération des phénomènes de fissuration. D'une part, la singularité de contrainte de l'ordre $1/\sqrt{r}$ est présente au voisinage de la pointe de la fissure. Cette singularité n'est pas admissible physiquement. D'autre part, l'amorçage d'une fissure à partir d'une structure saine ne peut pas être mis en évidence par le critère de Griffith. Suite à ces lacunes du modèle classique de Griffith, plusieurs modèles analytiques et numériques ont été proposés dans la littérature. Parmi ces modèles, [Francfort et Marigo, 1998] ont développé un modèle analytique, intitulé *loi-FM* dans la littérature («FM-law» en anglais), basé sur la *minimisation globale* de l'énergie en gardant l'hypothèse de Griffith sur la densité d'énergie surfacique de fissure. On présente ici les définitions du principe de minimisation globale d'énergie et de la loi-FM.

Définition 2 (Minimisation globale d'énergie). *Supposons que l'énergie totale \mathcal{E} du système est une fonction régulière du champ de déplacement \mathbf{u} . Un champ de déplacement cinématique admissible \mathbf{u} correspond à un **état d'équilibre globalement stable** si l'énergie totale correspondant à cet état est inférieure à l'énergie totale correspondant à tous les autres états cinématique admissibles*

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{E}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \text{ admissible}$$

Dans cette définition, un champ de déplacement est dit «cinématiquement admissible» seulement s'il est régulier par morceau et satisfait les conditions cinématiques aux limites et la condition de non-pénétration à travers la fissure.

Définition 3 (Loi-FM). *Une fonction continue $0 \leq t \mapsto \ell(t)$ satisfait (ou est la solution de) la loi-FM avec la condition initiale $\ell(0) = \ell_0$ si les trois propriétés suivantes sont validées*

1. **Irréversibilité** : $t \mapsto \ell(t)$ n'est pas décroissante
2. **Stabilité globale d'énergie** : $\mathcal{E}(t, \ell(t)) \leq \mathcal{E}(t, \ell) \quad \forall t \geq 0, \forall \ell \geq \ell(t)$
3. **Balance d'énergie** : $\mathcal{E}(t, \ell(t)) = \mathcal{E}(0, \ell_0) + \int_0^t \mathcal{E}(\tau, \ell(\tau)) d\tau$

La loi-FM nous permet d'expliquer le phénomène d'initiation de la fissure à partir d'une structure saine. Par contre, ce modèle ne peut pas être utilisé dans le cas des forces imposées. En effet, lorsque des forces sont imposées, la présence du travail des efforts extérieurs dans la formulation énergétique conduit à une énergie totale qui n'est (en général) plus bornée inférieurement. Donc, la minimisation globale de l'énergie totale du système tend vers $-\infty$. En plus, du fait que la minimisation globale ne prend pas en compte la barrière d'énergie, ce modèle conduit à une évolution discontinue de la fissure dans le temps, *i.e.* la longueur de la fissure prend immédiatement une valeur non nulle après son initiation.

1.1.2 Minimisation locale d'énergie - Modèles de zone cohésive

Afin de s'affranchir des difficultés de la minimisation globale avec la densité d'énergie surfacique de fissure de Griffith, les modèles de zone cohésive basés sur les travaux de [Dugdale, 1960] et [Barenblatt, 1962] présentent des résultats très prometteurs. Dans ce type de modèles, la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive $\Phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$ est une fonction non-triviale continue, croissante, concave du saut de déplacement à travers la fissure. Par exemple, Φ du modèle de Dugdale en mode I est une fonction linéaire du saut de déplacement normal $\llbracket u_n \rrbracket$ à condition que le dernier soit plus petit que la valeur critique δ_c , et prend la valeur G_c dès que $\llbracket u_n \rrbracket$ est plus grand que δ_c

$$\Phi(\llbracket u_n \rrbracket) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket < 0 \\ G_c \llbracket u_n \rrbracket / \delta_c & \text{si } 0 \leq \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c \\ G_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c \end{cases}$$

La grandeur $\sigma_c := G_c / \delta_c$ joue le rôle de la contrainte critique cohésive. Ainsi, les lèvres de la fissure sont en interaction par les forces cohésives. En mettant en place la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive dans la formule énergétique du système et utilisant le principe de minimisation locale d'énergie, le phénomène d'initiation de fissure peut être expliqué par un

critère en contrainte (soit une contrainte critique σ_c dans le problème unidimensionnel, soit une courbe cohésive intrinsèque dans le cas tridimensionnel, voir [Del Piero, 1999; Bourdin et al., 2008; Charlotte et al., 2000; Charlotte et al., 2006]). La définition du principe de minimisation locale d'énergie s'exprime comme suit.

Définition 4 (Minimisation locale d'énergie). *Supposons que l'énergie totale \mathcal{E} du système est une fonction régulière du champ de déplacement \mathbf{u} . Un champ de déplacement cinématique admissible \mathbf{u} correspond à un **état d'équilibre localement stable** s'il existe un voisinage de \mathbf{u} (dans le sens de la norme choisie) pour que l'énergie totale correspondant au champ \mathbf{u} soit inférieure à l'énergie totale correspondant à tous les autres états cinématique admissible dans ce voisinage*

$$\exists h(\mathbf{u}), \forall \mathbf{v} \text{ admissible tel que } \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \leq h(\mathbf{u}) \quad \mathcal{E}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{E}(\mathbf{v}) \quad (1.1)$$

Dans cette définition, un champ de déplacement est dit «cinématiquement admissible» seulement s'il est régulier par morceau et satisfait les conditions cinématiques aux limites et la condition de non-pénétration à travers la fissure.

En plus, la minimisation locale d'énergie nous permet de réunir le problème d'équilibre et de stabilité dans une formulation unique. Suite à la présence des longueurs caractéristiques dans les modèles de zone cohésive, les effets d'échelle sont possibles, par exemple la longueur critique de la barre unidimensionnelle dans [Charlotte et al., 2000].

1.1.3 Modèles de plasticité

La plasticité est un phénomène non-linéaire particulièrement important de la mécanique de résistance des matériaux. Plusieurs travaux expérimentaux, analytiques et numériques dans la littérature ont pour but de modéliser le comportement élasto-plastique du matériau. La phénoménologie de plasticité et sa modélisation sont étudiées dans [Lubliner, 2008]. Les modèles mathématiques de la plasticité sont proposés, comparés et discutés dans les travaux de [Nguyen, 2000; Han et Reddy, 2012]. L'implémentation numérique du comportement élasto-plastique du matériau est référencée à [Simo et Hughes, 2006]. A travers ces travaux, les concepts du matériau standard généralisé, de l'équilibre thermodynamique, des procédures irréversibles avec les variables internes sont introduits pour la plasticité. En particulier, le critère de plasticité est souvent modélisé par une limite d'élasticité dans le plan des contraintes. Évidemment, plusieurs choix de cette limite d'élasticité sont possibles. Parmi ces choix, le critère de plasticité de Von-Mises, concernant la partie déviatorique du champ de contrainte $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbb{I}$, est le plus utilisé dans la mécanique d'ingénieur. Concrètement, le critère de Von-Mises dans le cas de *plasticité parfaite* s'écrit sous la forme

$$f(\boldsymbol{\sigma}) := \sqrt{\frac{3}{2}}\|\mathbf{s}\| - \sigma_y \leq 0 \quad (1.2)$$

où σ_y , étant une constante positive correspondant à la contrainte critique de plasticité. Si on prend en compte l'écrouissage linéaire cinématique ou isotrope, le critère en contrainte (1.2)

devient

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p) := \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s} - K_c \boldsymbol{\varepsilon}_p\| - \sigma_y & \text{(écrouissage linéaire cinématique)} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}\| - \sigma_y - K_i p & \text{(écrouissage linéaire isotrope)} \end{cases} \quad (1.3)$$

Dans cette formulation, (K_c, K_i) représentent respectivement le tenseur d'ordre 4 de module d'écrouissage cinématique et le module d'écrouissage isotrope, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ désigne la déformation plastique, $p := \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\tau)\| d\tau$ désigne la déformation plastique cumulée. Les formulations du critère de Von-Mises (1.2)-(1.3) s'écrivent pour chaque point matériel. Afin d'implémenter la plasticité dans l'approche variationnelle, il faudrait exprimer l'énergie libre élastique (récupérable) et l'énergie dissipée par la plasticité (non-récupérable) sous la forme d'intégrale sur toute la structure. En particulier, dans le cas de la déformation infinitésimale où la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ s'écrit comme une somme de la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ et la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}_p$, l'énergie libre élastique récupérable s'exprime comme suit

$$\mathcal{E}_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + H(\boldsymbol{\varepsilon}_p, p) \right) d\Omega \quad (1.4)$$

où \mathbf{A} représente le tenseur d'ordre 4 d'élasticité, $H(\boldsymbol{\varepsilon}_p, p)$ correspond aux effets d'écrouissage durcissant ou adoucissant. Cette fonction est égale à $\frac{1}{2} K_i p^2$ dans le cas de l'écrouissage isotrope linéaire ou à $\frac{1}{2} K_c \boldsymbol{\varepsilon}_p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_p$ dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire. Par ailleurs, l'énergie dissipée par la plasticité (non-récupérable) s'écrit sous la forme suivante

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_p) := \sigma_y \int_0^t \int_{\Omega} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| d\Omega d\tau = \sigma_y \int_{\Omega} p d\Omega \quad (1.5)$$

1.1.4 Couplage entre la plasticité et la mécanique de la rupture

Même si plusieurs modèles de plasticité et de rupture sont proposés et développés depuis longtemps dans la littérature, le couplage entre ces deux phénomènes mécaniques non-linéaires est encore en débat. Les résultats prometteurs sont obtenus dans les travaux concernant le couplage entre la plasticité et les modèle continu d'endommagement. Dans la première approche, [Lemaitre et Chaboche, 1994; Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989] ont introduit le concept de la contrainte effective afin de coupler les mécanismes de plasticité et d'endommagement interne. Néanmoins, cette approche conduit en général aux matrices de rigidité tangentes non-symétriques. La deuxième approche du couplage plasticité-endommagement consiste à faire varier les critères de plasticité et d'endommagement en fonctions des variables internes. [Einav et al., 2007] montrent que le problème de couplage peut être formulé par deux potentiels dépendant des variables d'état. [Alessi et al., 2014; Alessi et al., 2015] étudient les influences de la plasticité sur le modèle d'endommagement à gradient dans le cadre variationnel. Dans ces travaux, la contrainte critique de plasticité est une fonction décroissante de la variable interne d'endommagement.

Une autre famille de modèles de couplage plasticité-rupture considère la présence d'une surface de discontinuité au sein de la structure et construit une solution élastoplastique en fond de fissure afin de s'affranchir la question concernant la singularité de contrainte. [Hult et McClintock, 1956; McClintock et Irwin, 1984] supposent que le champ de contrainte dans le matériau est borné par le critère de plasticité. Sachant que $\sigma \sim K_I/\sqrt{\pi r}$ (où K_I désigne le facteur d'intensité de contrainte en mode I en pointe de la fissure), une zone plastifiée est présente dans un voisinage de la pointe de la fissure. La taille et la forme de cette zone sont étudiées numériquement dans [Rice et Rosengren, 1968].

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'initiation et la propagation de fissure cohésive en prenant en compte le comportement élastoplastique du matériau. L'approche variationnelle est utilisée dans notre étude, ainsi la phase élastique est suivie de la phase élastoplastique, puis la fissure cohésive s'initie au sein de la structure. Les équations d'équilibre, les conditions aux limites et également les critères sont déduits grâce à la condition de stabilité locale d'ordre 1. En plus, la condition de stabilité locale d'ordre 2 nous permet de considérer la stabilité de la solution, on verra que celle-ci dépend de la taille de la structure. Dans un premier temps, les solutions analytiques du problème de la barre unidimensionnelle de comportement élastoplastique sous traction simple s'expriment explicitement et sont comparées avec le cas purement élastique présenté dans [Charlotte et al., 2006]. En conséquence, les influences de la plasticité sur le critère d'initiation de fissure cohésive et sur la réponse globale sont mises en évidence. Dans un deuxième temps, les formulations du problème généralisé tridimensionnel sont développées. La relation entre les critères d'initiation de fissure cohésive et de plasticité dans le plan des contraintes est mise en discussion. La stabilité de la réponse est formulée grâce à la condition de stabilité locale d'ordre 2 et le coefficient de Rayleigh.

1.2 Étude d'une barre unidimensionnelle sous traction

1.2.1 Comportement élastoplastique de la barre, loi cohésive et chargement

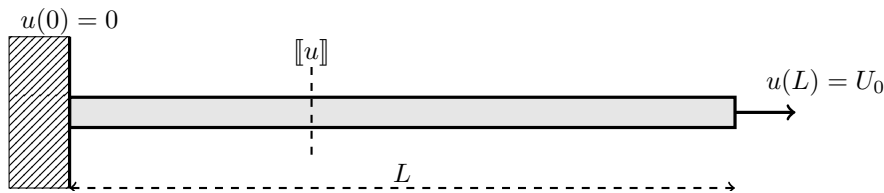


FIGURE 1.1 – Barre unidimensionnelle sous chargement en déplacement imposé

Considérons une barre de longueur naturelle L et de section normale S . Son comportement élastoplastique est caractérisé par ses coefficients de Lamé (λ, μ) (ou de manière équivalente, son module Young E et son coefficient de Poisson), son module d'écrouissage plastique isotrope K_i et la contrainte critique de plasticité σ_y . Dans le cas unidimensionnel, le champ de contrainte σ est scalaire, donc la barre est plastifiée dès que la contrainte dans la barre atteint la valeur critique de plasticité $\sigma = \sigma_y$. Ce matériau adopte la loi de zone cohésive de type Barenblatt dont les ingrédients principaux sont rappelés par la suite. Avant d'être soumise au chargement,

la barre est supposée saine et sans déformation. Sa configuration de référence est dénotée par $\Omega := [0, L]$. Lorsque la fissure est présente dans la barre, le champ de déplacement scalaire u est discontinue à $x \in [0, L]$ et sa limite à droite (respectivement, à gauche) est dénotée par $u^+(x)$ (respectivement, $u^-(x)$). Le principe de non-pénétration induit que le saut de déplacement à tous les points n'est pas négatif

$$[[u]](x) := u^+(x) - u^-(x) \geq 0 \quad (1.6)$$

L'ensemble des points de discontinuité du champ u est dénoté par S_u

$$S_u := \{x \in [0, L] : [[u]](x) > 0\}$$

On considère seulement le cas où le champ u admet un nombre fini des points de discontinuité, *i.e.* $\text{card}(S_u) < +\infty$. La barre est bloquée à l'extrémité $x = 0$ et soumise à un chargement en déplacement imposé U à l'autre extrémité $x = L$ qui est croissant en temps. La force volumique est ignorée. $\mathcal{U}_{ad}(U)$ dénote l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissible, *i.e.* l'ensemble des champs scalaires satisfaisant les conditions aux limites cinématiques et admettant le saut non négatif le long de la barre

$$\mathcal{U}_{ad}(U) = \{u^* \in H^1(\Omega \setminus S_{u^*}, \mathbb{R}) : u^*(0) = 0, \quad u^*(L) = U, \quad [[u^*]](x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, L]\}$$

où H^1 désigne l'espace vectoriel de Sobolev associé à la norme naturelle $\|\cdot\|_1$. Afin d'avoir la formulation de l'énergie surfacique de la fissure, on devrait étudier des propriétés de la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive $\Phi([u])$ étant une fonction du saut de déplacement. Cette fonction est croissante, concave et tend vers la valeur critique du taux de restitution d'énergie G_c lorsque le saut de déplacement tend vers l'infini. La dérivée de cette fonction à 0, dénotée par $\sigma_c := \Phi'(0)$, joue le rôle de la contrainte critique cohésive. En prenant en compte de la condition de non-pénétration du champ de déplacement, on peut écrire les propriétés de $\Phi([u])$ sous une forme plus synthétique

$$\begin{cases} \Phi([u]) = +\infty \text{ si } [[u]] < 0, & \Phi(0) = 0, & \Phi([u]) \rightarrow G_c \text{ lorsque } [[u]] \rightarrow +\infty \\ \Phi'([u]) > 0, & \Phi''([u]) < 0, & \Phi'''([u]) > 0 \quad \text{pour } [[u]] \geq 0 \\ \Phi'(0+) = \sigma_c > 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

La figure (1.2) représente la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive Φ en fonction du saut de déplacement $[[u]]$.

Remarque 1. Dans la construction de la densité d'énergie surfacique de la fissure (1.7), on introduit trois conditions essentielles de ses dérivées pour $[[u]] \geq 0$. Ces conditions relient étroitement aux hypothèses de régularité du modèle de zone cohésive et également facilitent notre analyse de la barre unidimensionnelle. Concrètement

- La dérivée première $\Phi'([u]) > 0$: cette inégalité présente la monotonie (strictement) croissante de la fonction Φ de la loi cohésive. Ainsi, Φ croît monotonement de 0 à valeur critique G_c du taux de restitution d'énergie.

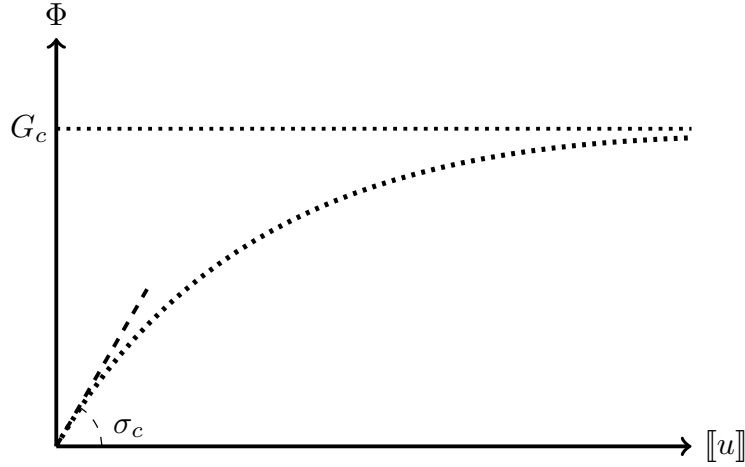


FIGURE 1.2 – Densité d'énergie surfacique de fissure cohésive en fonction du saut de déplacement

- La dérivée seconde $\Phi''(\llbracket u \rrbracket) < 0$: la concavité de la fonction Φ désigne le comportement adoucissant du matériau dès que la fissure apparaît. En plus, on en déduit que la contrainte dans la barre ne peut pas dépasser la contrainte critique $\sigma_c = \Phi'(0)$ et donc la modèle cohésif n'admet pas de singularité de contrainte. La présence d'une contrainte critique est la plus importante contribution du modèle cohésif par rapport au modèle classique de Griffith.
- La troisième dérivée $\Phi'''(\llbracket u \rrbracket) > 0$: cette condition est une hypothèse supplémentaire dans le problème unidimensionnel qui nous permet d'étudier plus facilement la stabilité de la solution globale de la barre fissurée. Les discussions sont approfondies à la fin de cette section.

1.2.2 Formulations énergétiques

Pour un déplacement imposé U donné, l'énergie totale de la barre $\mathcal{E}(u, \varepsilon_p, p)$ étant fonction du déplacement scalaire $u \in \mathcal{U}_{ad}(U)$, déformation plastique ε_p et déformation plastique cumulée $p = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p| d\tau$ s'exprime comme une somme de l'énergie libre, l'énergie dissipée par plasticité et l'énergie surfacique de fissure (sachant que la barre n'est pas soumise à la force imposée)

$$\mathcal{E}(u, \varepsilon_p, p) = \mathcal{E}_e(u, \varepsilon_p, p) + \mathcal{E}_p(p) + \mathcal{E}_s(u) \quad (1.8)$$

En utilisant (1.4) pour le cas unidimensionnel avec l'écroutissage isotrope linéaire, on obtient

$$\mathcal{E}_e(u, \varepsilon_p, p) = \int_{\Omega \setminus S_u} \left(\frac{1}{2} E (u' - \varepsilon_p)^2 + \frac{1}{2} K_i p^2 \right) S dx \quad (1.9)$$

Comme dans le cas général présenté précédemment (voir (1.5)), l'énergie dissipée par plasticité s'exprime comme suit

$$\mathcal{E}_p(p) = \sigma_y \int_{\Omega \setminus S_u} p S dx \quad (1.10)$$

Aussi, l'énergie surfacique de la fissure cohésive s'écrit comme suit

$$\mathcal{E}_s(u) = \sum_{S_u} \Phi(\llbracket u \rrbracket) S \quad (1.11)$$

Selon Définition 4, le triple (u, ε_p, p) est la solution du problème d'évolution de fissure cohésive au sein de la barre unidimensionnelle élastoplastique si et seulement s'il minimise localement l'énergie totale de la barre dans l'espace des champs admissibles des variables d'état. Pour $h > 0$ suffisamment petit, considérons les champs tests suivants

$$u^* := u + hv, \quad \varepsilon_p^* := \varepsilon_p + h\zeta, \quad p^* := p + h|\zeta| \quad (1.12)$$

où

$$\begin{cases} v \in \mathcal{D} := \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) : v(0) = v(L) = 0, \llbracket v \rrbracket \text{ arbitraire sur } S_u, \llbracket v \rrbracket \geq 0 \text{ sur } S_v \setminus S_u\} \\ \zeta \text{ arbitraire} \end{cases} \quad (1.13)$$

En injectant les champs (1.12) dans la Définition 4 et développant jusqu'au deuxième ordre, on obtient l'inégalité

$$h\mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|) + \frac{h^2}{2}\mathcal{E}''(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|) \geq 0 \quad (1.14)$$

Dans la formulation (1.14), les premier et deuxième termes concernent respectivement les dérivées première et seconde directionnelles de l'énergie totale de la barre par rapport au triple des variables d'état. Cette inégalité devrait être validée pour tous les (v, ζ) admissibles dans le sens de (1.13).

Remarque 2 (Les conditions de stabilité locale). *La **condition de stabilité locale d'ordre 1** s'exprime comme la non-négativité de la dérivée première directionnelle de l'énergie totale de la barre par rapport aux variables d'état $\mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|) \geq 0$ pour tous les champs (v, ζ) admissibles. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour que la minimisation locale (1.14) soit validée. En particulier, pour les champs (v, ζ) tels que $\mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|) > 0$, i.e. inégalité stricte, (1.14) est automatique validée du fait que $h > 0$ suffisamment petit. Par contre, pour les champs (v, ζ) tels que $\mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|) = 0$, on devrait étudier la positivité de la dérivée seconde directionnelle de l'énergie totale de la barre $\mathcal{E}''(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|)$. Cela déduit la **condition de stabilité locale d'ordre 2**. En résumé, on a*

1. Condition de stabilité locale d'ordre 1 :

$$\mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}, \forall \zeta \quad (1.15)$$

2. Condition de stabilité locale d'ordre 2 :

$$\forall v \in \mathcal{D}, \forall \zeta \text{ tels que } \mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|) = 0 : \quad \mathcal{E}''(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|) \geq 0 \quad (1.16)$$

On considère dans les sous sections suivantes les conditions de stabilité locale au cours de l'évolution de fissure cohésive au sein de la barre unidimensionnelle.

1.2.3 Condition de stabilité locale d'ordre 1

En injectant (1.8)-(1.11) dans (1.15), la condition de stabilité locale d'ordre 1 s'écrit sous la forme explicite $\forall v \in \mathcal{D}, \forall \zeta$

$$\int_{[0,L] \setminus S_{u^*}} \left(E(u' - \varepsilon_p)(v' - \zeta) + (\sigma_y + K_i p)|\zeta| \right) S dx + \sum_{S_{u^*}} \Phi'(\llbracket u \rrbracket) \llbracket v \rrbracket S \geq 0 \quad (1.17)$$

Considérons les différents champs (v, ζ) suivants

- (i) Choisissons des champs réguliers $v \in \mathcal{D}$ tels que $\llbracket v \rrbracket = 0$ sur $[0, L]$ et $\zeta = 0$. Sachant que la signe de v est arbitraire, on obtient les équations d'équilibre classiques

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(E(u' - \varepsilon_p) \right) = 0 & \text{sur } [0, L] \setminus S_u \\ \llbracket E(u' - \varepsilon_p) \rrbracket = 0 & \text{sur } S_u \end{cases} \quad (1.18)$$

En conséquence, la contrainte dans la barre $\sigma := E(u' - \varepsilon_p)$ est homogène et donc $F = ES(u' - \varepsilon_p)$ est une constante à déterminer. En injectant (1.18) dans (1.17) et sachant que $S_{u^*} := S_u \cup (S_v \setminus S_u)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{[0,L] \setminus S_{u^*}} \left(-F\zeta + S(\sigma_y + K_i p)|\zeta| \right) dx \\ & + \sum_{S_u} \left(S\Phi'(\llbracket u \rrbracket) - F \right) \llbracket v \rrbracket + \sum_{S_v \setminus S_u} \left(S\sigma_c - F \right) \llbracket v \rrbracket \geq 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

où $\sigma_c := \Phi'(0+)$ désigne la contrainte critique cohésive.

- (ii) Choisissons $\zeta = 0$. Sachant que $\llbracket v \rrbracket$ peut être choisi arbitrairement sur S_u tandis que $\llbracket v \rrbracket$ devrait être non-négatif sur $S_v \setminus S_u$, on obtient les relations entre F et la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive Φ

$$\begin{cases} F \leq S\sigma_c & \text{sur } [0, L] \setminus S_u \\ F = S\Phi'(\llbracket u \rrbracket) & \text{sur } S_u \end{cases} \quad (1.20)$$

- (iii) Choisissons v tel que l'ensemble des points de discontinuité de v appartient dans celui de u , i.e. $S_v \setminus S_u = \emptyset$, on en déduit que

$$S(\sigma_y + K_i p)|\zeta| \geq F\zeta \quad \forall \zeta \quad (1.21)$$

L'inégalité (1.21) n'est rien d'autre que l'un critère de plasticité de Von-Mises avec l'écrouissage isotrope linéaire

$$f(F) = |F| - S\sigma_y - SK_i p \leq 0 \quad (1.22)$$

Remarque 3. La condition de stabilité locale d'ordre 1 nous donne des résultats importants concernant l'équilibre de l'état, ainsi les critères de plasticité et de zone cohésive

- Les équations d'équilibre et le critère de plasticité de Von-Mises peuvent s'exprimer comme des résultats naturels du principe de minimisation d'énergie. La formulation du critère de plasticité est en fait cohérente avec les formes de l'énergie libre et de l'énergie dissipée par plasticité écrites dans (1.9) et (1.10).
- La condition (1.20) déduite de la condition de stabilité d'ordre 1 contient non seulement la contrainte cohésive sur les lèvres de fissure donnée par la dérivée de la densité d'énergie surfacique mais également le critère en contrainte d'amorçage de fissure cohésive. Du fait que la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive est une fonction concave du saut de déplacement, la contrainte cohésive est toujours inférieure ou égale à la contrainte critique σ_c . En conséquence, la contrainte homogène dans la barre est bornée par σ_c à tous les instants.
- Dans le cas où la contrainte critique cohésive σ_c est plus petite que la contrainte critique de plasticité σ_y , la contrainte dans la barre est ainsi plus petite que σ_y à tous les points et à tous les instants. Donc, la phase purement élastique est suivie de l'évolution de fissure cohésive et la plasticité n'est jamais présente. Dans ce cas, on retrouve les résultats concernant l'évolution de fissure cohésive dans un milieu purement élastique présenté dans [Charlotte et al., 2000; Charlotte et al., 2006]. Par ailleurs, on s'intéresse dans ce chapitre au cas où $\sigma_c \geq \sigma_y$, par conséquent la phase purement élastique est suivie de la phase élastoplastique dès que la contrainte dans la barre atteint σ_y , et la fissure cohésive s'initie dans la barre lorsque $\sigma = \sigma_c$.

1.2.4 Condition de stabilité locale d'ordre 2

La condition de stabilité locale d'ordre 1 est nécessaire mais pas suffisante pour que la stabilité locale (1.14) soit validée, donc on devra prendre en compte la condition de stabilité locale d'ordre 2 donnée dans (1.16). L'étude de cette condition consiste à deux questions suivantes qui devraient être répondues l'une après l'autre

- Avec quelles conditions et/ou correspondant à quels champs tests (v, ζ) , la dérivée première directionnelle de l'énergie totale par rapport aux variables d'état $\mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|)$ s'annule, *i.e.* l'inégalité (1.17) devient une égalité?
- En admettant telles conditions et/ou choisissant tels champs tests, la dérivée seconde directionnelle de l'énergie totale $\mathcal{E}''(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|)$ est-elle non-négative?

Avant de répondre concrètement à ces questions, on démontre la proposition suivante concernant le comportement de la barre unidimensionnelle fissurée.

Proposition 1. *Lorsque la fissure cohésive évolue au sein de la barre unidimensionnelle sous traction simple, *i.e.* $\llbracket u \rrbracket > 0$ et $\dot{\llbracket u \rrbracket} > 0$, le comportement de la barre est en décharge élastique, *i.e.* $\dot{p} = 0$. En conséquence, la phase élastique de la barre est suivie de la phase élastoplastique, puis la fissure cohésive apparaît et la barre est en décharge élastique.*

Démonstration. A partir des critères de zone cohésive et de plasticité écrits respectivement dans (1.20) et (1.22), les deux lois de dissipation (cohésive et plastique) s'écrivent sous les formes suivantes contenant le principe d'irréversibilité (**ir**), la stabilité (**st**) et la balance d'énergie (**be**)

1.2. Étude d'une barre unidimensionnelle sous traction

- Loi cohésive

$$\begin{cases} (\text{ir}) & \dot{[u]} \geq 0 \\ (\text{st}) & F - S\Phi'([u]) \leq 0 \\ (\text{be}) & (F - S\Phi'([u]))\dot{[u]} = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

- Loi de plasticité

$$\begin{cases} (\text{ir}) & \dot{p} \geq 0 \\ (\text{st}) & F - S\sigma_y - SK_ip \leq 0 \\ (\text{be}) & (F - S\sigma_y - SK_ip)\dot{p} = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

où on remplace $|F|$ dans (1.22) par F du fait que la barre est en traction.

Supposons que le comportement de la barre soit toujours élastoplastique, *i.e.* $\dot{p} > 0$, lorsque la fissure est présente dans la barre, *i.e.* $\dot{[u]} > 0$. Ainsi, les deux critères de zone cohésive et de plasticité sont atteints. En utilisant (1.23) et (1.24), cela déduit que

$$\begin{cases} F &= S\Phi'([u]) \\ F &= S\sigma_y + SK_ip \end{cases}$$

D'où $\Phi'([u]) = \sigma_y + K_ip$. En dérivant cette égalité par rapport au temps, on obtient

$$\Phi'(\dot{[u]}) = K_i\dot{p} \quad (1.25)$$

Par ailleurs, on a

$$\Phi'(\dot{[u]}) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial [u] \partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial [u]^2} \dot{[u]} < 0$$

du fait que la fonction $\Phi([u])$ est strictement concave pour $[u] > 0$. En conséquence, (1.25) conduit à une absurde et la Proposition est démontrée. \square

Grâce à la Proposition 1, on va répondre à deux questions de la condition de stabilité locale d'ordre 2 dans deux configurations suivantes : *barre plastifiée sans fissure* et *barre fissurée en décharge élastique*.

1.2.4.1 Barre plastifiée sans fissure

Dans ce cas, à partir de (1.19), (1.20) et (1.21), la dérivée première directionnelle de l'énergie totale par rapport aux variables d'état $\mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|)$ s'annule seulement si

$$\begin{cases} S_u &\equiv \emptyset \\ F &= S\sigma_c \\ F &= S\sigma_y + SK_ip \text{ et } \zeta \geq 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

A cet instant, les deux critères cohésif et de plasticité sont atteints et la déformation plastique cumulée p atteint sa valeur critique suivante

$$p = p_0 := \frac{\sigma_c - \sigma_y}{H} \quad (1.27)$$

D'où, le déplacement à l'extrémité de la barre unidimensionnelle (autrement dit, le déplacement imposé) $u(x = L) = U_0$ à cet instant s'exprime comme suit

$$U_0 = \int_{[0,L]} u'(x) dx = \int_{[0,L]} \left(\frac{F}{ES} + p_0 \right) dx = L \left(\frac{\sigma_c}{E} + \frac{\sigma_c - \sigma_y}{H} \right) \quad (1.28)$$

L'espace des champs tests admissibles introduit dans (1.13) devient

$$\begin{cases} \mathcal{D}_p := \{v : & v(0) = v(L) = 0, \llbracket v \rrbracket \geq 0 \text{ sur } S_v\} \\ \zeta \geq 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites affectant les champs tests de déplacement v déduisent que

$$\int_{[0,L] \setminus S_v} v' dx + \sum_{S_v} \llbracket v \rrbracket = 0 \quad (1.29)$$

En injectant (1.8)-(1.11) dans (1.16), la condition de stabilité locale d'ordre 2 s'écrit sous la forme d'intégrale $\forall v \in \mathcal{D}_p, \forall \zeta \geq 0$

$$\int_{[0,L] \setminus S_v} \left[E(v' - \zeta)^2 + K_i \zeta^2 \right] S dx + \sum_{S_v} S \Phi''(0) \llbracket v \rrbracket^2 \geq 0 \quad (1.30)$$

Introduisons la grandeur suivante

$$\lambda = \min_{\substack{\zeta \geq 0, v \in \mathcal{D}_p \\ \sum_{S_v} \llbracket v \rrbracket^2 = 1}} \left[\mathcal{F}(v, \zeta) := \int_{[0,L] \setminus S_v} \left[E(v' - \zeta)^2 + H \zeta^2 \right] dx \right] \quad (1.31)$$

Afin de considérer la stabilité locale d'ordre 2, il nous faudrait identifier λ , ensuite comparer cette valeur critique avec $-\Phi''(0)$. Nous cherchons la valeur minimale de la fonction de deux variables $\mathcal{F}(v, \zeta)$ par la minimisation alternative. Tout d'abord, en fixant $\zeta \geq 0$, la fonction $\mathcal{F}(v, \zeta)$ est considérée comme une fonction d'une seule variable $v \in \mathcal{D}_p$ paramétrée par ζ , dénotée par $g_\zeta(v)$. La dérivée de $g_\zeta(v)$ par rapport à v dans la direction $\bar{v} \in \mathcal{D}_p$ s'écrit comme suit

$$g'_\zeta(v)(\bar{v}) = \int_{[0,L] \setminus S_v} 2E(v' - \zeta) \bar{v}' dx = - \int_{[0,L] \setminus S_v} 2E(v' - \zeta)' \bar{v} dx \quad (1.32)$$

L'intégrale par partie est réalisée en prenant en compte la condition limite du champ de déplacement admissible $\bar{v}(0) = \bar{v}(L) = 0$. Pour que $g_\zeta(v)$ atteigne sa valeur minimale, $g'_\zeta(v)(\bar{v}) = 0$. Donc, cela déduit que $(v' - \zeta)$ est constant par morceau. Supposons que l'ensemble des points de discontinuité du champ v contient n points, *i.e.* $S_v = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pour $x_i \in [0, L]$ et utilisons les notations conventionnelles $x_0 = 0, x_{n+1} = L$. En conséquence, sur tous les morceaux continus de la barre, on a

$$(v' - \zeta)(x) = C_i, \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (1.33)$$

1.2. Étude d'une barre unidimensionnelle sous traction

où (C_i) sont n constantes à identifier. En injectant (1.33) dans (1.32), on en déduit que

$$g'_\zeta(v)(\bar{v}) = 2E \sum_{i=0}^n (C_i - C_{i+1}) \bar{v}(x_i)$$

Cette dérivée directionnelle s'annule seulement si toutes les constantes C_i sont identiques le long de la barre unidimensionnelle. Cette constante unique est dénotée par \mathbf{C} . En conséquence

$$(v' - \zeta)(x) = \mathbf{C}, \quad \forall x \in [0, L] \setminus S_v \quad (1.34)$$

En intégrant le long de la barre privée de l'ensemble des points de discontinuité de v , on obtient l'égalité suivante

$$\int_{[0, L] \setminus S_v} v' dx - \int_{[0, L] \setminus S_v} \zeta dx = \mathbf{C}L$$

En injectant (1.29) dans cette égalité, on a

$$- \sum_{S_v} \llbracket v \rrbracket - \int_{[0, L] \setminus S_v} \zeta dx = \mathbf{C}L$$

Du fait que le saut du champ test de déplacement $\llbracket v \rrbracket \geq 0$ sur son ensemble des point de discontinuité S_v et $\zeta \geq 0$, cela déduit que la constante \mathbf{C} est non-positive. Donc, la fonction $(v' - \zeta)(x)$ est homogène et égale à une constante non-positive sur toute la barre privée des points de discontinuité de v

$$(v' - \zeta)(x) = \mathbf{C} \leq 0 \quad \forall x \in [0, L] \setminus S_v \quad (1.35)$$

Pour $v \in \mathcal{D}_p$ donné, $\mathcal{F}(v, \zeta)$ est maintenant considérée comme une fonction d'une seule variable $\zeta \geq 0$ paramétrée par v , dénotée par $f_v(\zeta)$. La dérivée de la dernière par rapport à ζ dans la direction $\bar{\zeta} \geq 0$ s'exprime comme suit

$$f'_v(\zeta)(\bar{\zeta}) = \int_{[0, L] \setminus S_v} 2[-E(v' - \zeta) + H\zeta] \bar{\zeta} dx \quad (1.36)$$

Suite à (1.35) et la non-négativité du champ test $\bar{\zeta}$, nous déduisons de (1.36) que

$$f'_v(\zeta)(\bar{\zeta}) \geq 0$$

Par conséquent, $f_v(\zeta)$ est une fonction monotone croissante de $\zeta \geq 0$. D'où sa minimisation correspond à $\zeta = 0$

$$\min_{\zeta} f_v(\zeta) = f_v(0) = \int_{[0, L] \setminus S_v} E v'^2 dx \quad (1.37)$$

En injectant $\zeta = 0$ dans (1.35), on en déduit que $v'(x) = \mathbf{C} \leq 0$. Ainsi on peut écrit la formulation de minimisation λ sous le forme plus explicite

$$\lambda = \min_v \min_{\zeta} f_v(\zeta) = \min_v EL v'^2$$

En injectant (1.29) et sachant que $v'(x)$ est homogène le long de la barre privée de l'ensemble des points de discontinuité de v , cette formulation devient

$$\lambda = \frac{E}{L} \min_v \left(\sum_{S_v} \llbracket v \rrbracket \right)^2$$

Du fait que $\llbracket v \rrbracket \geq 0$ sur S_v , on a l'intégrale élémentaire suivante

$$\left(\sum_{S_v} \llbracket v \rrbracket \right)^2 \geq \sum_{S_v} \llbracket v \rrbracket^2 = 1$$

En conséquence, la grandeur de minimisation λ peut se calculer tout simplement

$$\lambda = \frac{E}{L} \quad (1.38)$$

Selon (1.30), la condition de stabilité locale d'ordre 2 est validée seulement si λ donnée par (1.38) est plus grande que $-\Phi''(0)$. Cela conduit à une condition suivante sur la longueur de la barre unidimensionnelle

$$L \leq L_c := -\frac{E}{\Phi''(0)} \quad (1.39)$$

Donc, la condition stabilité locale d'ordre 2 d'une barre unidimensionnelle plastifiée sans fissure est équivalente à un critère de longueur de la barre : si la longueur de la barre est inférieure à la longueur critique L_c donnée par (1.39), la solution correspondant à $\mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|) = 0$ est stable ; dans le cas contraire, la solution est instable.

Remarque 4. *Ce cas est en fait correspondant à l'initiation de la fissure cohésive au sein de la barre plastifiée où la contrainte élasto-plastique (homogène) dans la barre atteint la valeur critique $\sigma_c = \Phi'(0)$. Donc, la solution au seuil cohésif est localement stable si la longueur de la barre est plus petite que la longueur critique L_c donnée par (1.39) mais localement instable dans le cas contraire. Par ailleurs, la déformation plastique cumulée atteint la valeur critique p_0 calculée dans (1.27) à l'instant d'initiation de la fissure.*

1.2.4.2 Barre fissurée en décharge élastique

Dans ce cas, à partir de (1.19), (1.20) et (1.21), la dérivée première directionnelle de l'énergie totale par rapport aux variables d'état $\mathcal{E}'(u, \varepsilon_p, p)(v, \zeta, |\zeta|)$ s'annule seulement si

$$\begin{cases} F &= S\Phi'(\llbracket u \rrbracket) & \text{sur } S_u \\ F &\leq S\sigma_c & \text{sur } [0, L] \setminus S_u \\ S_v &\subset S_u \\ F &\leq S\sigma_y + SK_ip & \text{et } \zeta = 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

Le champ test ζ est identique à 0 du fait que le comportement de la barre est en décharge élastique, *i.e.* la déformation plastique n'évolue pas dans cette phase $\dot{\varepsilon}_p = 0$. Cette dernière

1.2. Étude d'une barre unidimensionnelle sous traction

est seulement une fonction de x (peut être constante dans le cas pratique), dénotée par $\varepsilon_p(x)$. Rappelons que $F = ES(u'(x) - \varepsilon_p(x))$ est homogène le long de la barre privée l'ensemble des points de discontinuité de u (mais dépend évidemment du temps). Ainsi, on a

$$u'(x) = \frac{F}{ES} + \varepsilon_p(x) \quad \text{sur } [0, L] \setminus S_u \quad (1.41)$$

Par ailleurs, du fait $\Phi(\llbracket u \rrbracket)$ est concave, la fonction $\Phi'(\llbracket u \rrbracket)$ est monotone décroissante sur l'ensemble des points de discontinuité de u . Ainsi, cette fonction est inversible. Donc on peut réécrire la première équation dans (1.40) comme suit

$$\llbracket u \rrbracket = \Phi'^{-1}\left(\frac{F}{S}\right) \quad (1.42)$$

En conséquence, le déplacement à l'extrémité de la barre unidimensionnelle (autrement dit, le déplacement imposé) $u(x = L) = U$ s'exprime comme suit

$$U = \int_{[0, L] \setminus S_u} u' dx + \sum_{S_u} \llbracket u \rrbracket = L \frac{F}{ES} + \int_{[0, L] \setminus S_u} \varepsilon_p(x) dx + \text{card}(S_u) \Phi'^{-1}\left(\frac{F}{S}\right) \quad (1.43)$$

où $\text{card}(S_u)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble S_u . L'équation (1.43) est la réponse globale de la barre qui fait lien entre le déplacement imposé à l'extrémité $x = L$ et la contrainte (homogène) dans la barre. Voyons que F et $\varepsilon_p(x)$ sont indépendantes, du fait que F est une constante par rapport à x mais dépend du temps (ainsi, du chargement), par contre $\varepsilon_p(x)$ dépend de x mais n'évolue pas avec le temps. La dérivée de la fonction $U(F)$ se calcule facilement

$$U'(F) = \frac{L}{ES} + \frac{\text{card}(S_u)}{S \Phi''\left[\Phi'^{-1}\left(\frac{F}{S}\right)\right]} \quad (1.44)$$

Par ailleurs, l'espace des champs tests admissibles introduit dans (1.13) devient

$$\mathcal{D}_f = \{v : \quad v(0) = v(L) = 0, S_v \subset S_u\}$$

En injectant (1.8)-(1.11) dans (1.16), la condition de stabilité locale d'ordre 2 s'écrit sous la forme d'intégral $\forall v \in \mathcal{D}_f$

$$\int_{[0, L] \setminus S_u} ES v'^2 dx + \sum_{S_u} \Phi''(\llbracket u \rrbracket) \llbracket v \rrbracket^2 S \geq 0 \quad (1.45)$$

On utilise l'inégalité (1.45) pour démontrer la proposition suivante concernant une propriété très importante concernant le nombre d'éléments de l'ensemble des points de discontinuité du champ u qui satisfait la condition de stabilité d'ordre 2.

Proposition 2 (Nombre d'éléments de S_u). *Tous les champs de déplacement d'équilibre u avec plus d'un point de discontinuité, i.e. $\text{card}(S_u) > 1$ est instable. Seulement la solution d'équilibre située sur la branche décroissante de $U(F)$ avec un et seulement un point de discontinuité est stable.*

Démonstration. Considérons le champ de déplacement u avec $n > 1$ discontinuités, *i.e.* l'ensemble des points de discontinuité contient $n > 1$ éléments $S_u = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On choisit le champ test de déplacement v tel que

$$v(x) = 0 \quad \forall x \notin [x_1, x_n] \quad \text{et} \quad v(x) = 1 \quad \forall x \in]x_1, x_n[$$

Ce champ v est évidemment admissible dans le sens de \mathcal{D}_f . En effet, les conditions aux limites sont satisfaites et l'ensemble des points de discontinuité de v est $S_v = \{x_1, x_n\} \subset S_u$. Ce champ test v est constant par morceau sur $[0, L] \setminus S_u$. En injectant ce champ test dans (1.45), la condition de stabilité locale d'ordre 2 est réécrite comme suit

$$S \left[\Phi''(\llbracket u \rrbracket(x_1)) + \Phi''(\llbracket u \rrbracket(x_n)) \right] \geq 0$$

La concavité de la fonction $\Phi(\llbracket u \rrbracket)$ induit la négativité de $\Phi''(\llbracket u \rrbracket(x_1))$ et $\Phi''(\llbracket u \rrbracket(x_n))$. En conséquence, la validité de la condition de stabilité locale d'ordre 2 est impossible pour le champ de déplacement v choisi. Donc, la solution u avec plus d'un point de discontinuité est instable (localement).

On considère maintenant un champ d'équilibre u avec un seul point de discontinuité $S_u = \{x_1\}$ où x_1 est arbitraire dans l'intervalle $(0, L)$. L'espace des champs tests admissibles devient

$$\mathcal{D}_1 = \{v : \quad v(0) = v(L) = 0, S_v \subset \{x_1\}\}$$

La condition de stabilité locale d'ordre 2 s'exprime comme suit

$$\int_{[0, L] \setminus \{x_1\}} E S v'^2 dx + S \phi''(\llbracket u \rrbracket(x_1)) \llbracket v \rrbracket^2 \geq 0$$

Introduisons la grandeur suivante

$$\lambda = \min_{v \in \mathcal{D}_1, \llbracket v \rrbracket = 1} \left\{ h(v) = \int_{[0, L] \setminus \{x_1\}} E v'^2 dx \right\}$$

Afin d'étudier la stabilité locale d'ordre 2, nous devons identifier λ , ensuite comparer cette valeur avec $-\Phi''(\llbracket u \rrbracket(x_1))$. La dérivée de la fonction $h(v)$ par rapport à v dans la direction $\bar{v} \in \mathcal{D}_1$ s'exprime

$$h'(v)(\bar{v}) = -2E \int_{[0, L] \setminus \{x_1\}} v'' \bar{v} dx \quad (1.46)$$

Pour que la fonction $h(v)$ atteigne sa valeur minimale, $h'(v)(\bar{v}) = 0$. Cela déduit que $v''(x) = 0$. Donc $v'(x)$ est constante par morceau sur $[0, L] \setminus \{x_1\} = [0, x_1] \cup (x_1, L]$. Introduisons deux constantes telles que

$$v'(x) = \begin{cases} C_1 & \text{pour } x \in [0, x_1) \\ C_2 & \text{pour } x \in (x_1, L] \end{cases}$$

En injectant les constantes dans (1.46), on obtient

$$h'(v)(\bar{v}) = 2E(C_1 - C_2)\bar{v}(x_1)$$

1.2. Étude d'une barre unidimensionnelle sous traction

L'égalité $h'(v)(\bar{v}) = 0$ déduit que $C_1 = C_2$. En conséquence, la dérivée du champ v qui minimise $h(v)$ devrait être homogène sur $[0, L] \setminus \{x_1\}$. Par ailleurs, les conditions aux limites sur v nous donnent

$$\int_{[0, L] \setminus \{x_1\}} v' dx = -\llbracket v \rrbracket(x_1) = -1$$

D'où, $h(v)$ est minimisée lorsque le champ test de déplacement v satisfait $v'(x) = -\frac{1}{L}$ le long de la barre unidimensionnelle privée le point de discontinuité x_1 . Donc

$$\lambda = \min_{v \in \mathcal{D}_1, \llbracket v \rrbracket = 1} h(v) = \frac{E}{L} \quad (1.47)$$

Selon (1.45), la condition de stabilité locale d'ordre 2 est validée seulement si λ donnée par (1.47) est plus grande que $-\Phi''(\llbracket u \rrbracket(x_1))$. Cela déduit que

$$E + \Phi''(\llbracket u \rrbracket(x_1)) L \geq 0 \quad (1.48)$$

En injectant (1.42) dans cette inégalité, on obtient

$$E + \Phi'' \left[\Phi'^{-1} \left(\frac{F}{S} \right) \right] L \geq 0 \quad (1.49)$$

Par ailleurs, la dérivée de la fonction $U(F)$ donnée par (1.44) dans le cas d'un seul point de discontinuité s'exprime comme suit

$$U'(F) = \frac{L}{ES} + \frac{1}{S \Phi'' \left[\Phi'^{-1} \left(\frac{F}{S} \right) \right]} \quad (1.50)$$

Sachant que la fonction $\Phi(\llbracket u \rrbracket)$ est concave, *i.e.* $\Phi''(\llbracket u \rrbracket) \leq 0$ et combinant la condition (1.49) avec la formulation de la dérivée $U'(F)$ exprimée dans (1.50), on en déduit que

$$U'(F) \leq 0$$

Donc la solution stable (localement) se situe sur la branche décroissante de $U(F)$. La Proposition est ainsi démontrée complètement. \square

Voyons que la stabilité de la solution dépend éventuellement de la longueur de la barre. En effet, l'inégalité (1.49) peut être réécrite sous la forme d'un critère en longueur

$$L \leq L_c(F) := - \frac{E}{\Phi'' \left[\Phi'^{-1} \left(\frac{F}{S} \right) \right]} \quad (1.51)$$

Donc, à chaque instant donné, la réponse de la barre unidimensionnelle est stable seulement si la longueur de la dernière est plus petite que l'une longueur critique qui dépend du chargement (ou de manière équivalente, de F), et instable dans le cas contraire. En particulier, juste après

l'amorçage de la fissure cohésive, l'ouverture de la fissure est très proche de zero $\llbracket u \rrbracket \simeq 0$ et la force F est très proche de la force cohésive $F \simeq S\sigma_c$, le critère en longueur (1.51) devient

$$L \leq L_c(S\sigma_c) = -\frac{E}{\Phi''(0)} \quad (1.52)$$

On démontre la proposition suivante

Proposition 3 (Critère de longueur). *Si la longueur de la barre est inférieure à la longueur critique $L_c(S\sigma_c)$ définie dans (1.52), la réponse de la barre unidimensionnelle est toujours stable dès que la fissure est présente dans la barre. Dans le cas contraire, si la longueur de la barre est supérieure à la longueur critique $L_c(S\sigma_c)$, la réponse de la barre est instable juste après l'initiation de la fissure cohésive et la contrainte chute brutalement dans la barre.*

Démonstration. Deux cas de la longueurs de la barre sont considérés successivement

- (i) Si $L \leq L_c(S\sigma_c) = -\frac{E}{\Phi''(0)}$: par construction de la densité d'énergie surfacique $\Phi(\llbracket u \rrbracket)$ donnée dans (1.7), on a $\Phi'''(\llbracket u \rrbracket) > 0$ pour toutes les valeurs non-négatives du saut de déplacement. On en déduit que

$$\Phi''(0) \leq \Phi''(\llbracket u \rrbracket) \quad \forall \llbracket u \rrbracket \geq 0$$

En conséquence,

$$L \leq -\frac{E}{\Phi''(0)} \leq -\frac{E}{\Phi''(\llbracket u \rrbracket)} \quad \forall \llbracket u \rrbracket \geq 0$$

Donc le critère de stabilité en longueur (1.51) est toujours validé au cours de l'évolution la fissure. Ainsi la réponse de la barre est toujours localement stable dès que la fissure cohésive s'initie. L'évolution de la fissure cohésive au sein de la barre unidimensionnelle est dite **continue**.

- (ii) Si $L > L_c = -\frac{E}{\Phi''(0)}$: Juste après l'initiation de la fissure cohésive à un point $x_1 \in [0, L]$, le critère de stabilité en longueur n'est pas validée, ainsi la réponse de la barre se situe sur la branche croissante de la courbe $U(F)$ et est instable localement. En conséquence, un *snap-back* devra apparaître sur la courbe de réponse globale $U(F)$. La contrainte dans la barre, et également F , chutent immédiatement après l'amorçage de la fissure lorsque l'on continue à augmenter le déplacement imposé U . L'évolution de la fissure cohésive au sein de la barre unidimensionnelle est dite **discontinue**.

La Proposition est ainsi démontrée. □

Remarque 5. La longueur critique $L_c(S\sigma_c)$ donnée dans (1.52) est identique au résultat obtenu dans le cas de la barre plastifiée sans fissure (1.39). En particulier, cette longueur critique est indépendant du module d'écrouissage K_i mais dépend du module Young E et la dérivée seconde de l'énergie d'énergie surfacique de fissure cohésive par rapport au saut de déplacement à l'origine $\Phi''(0)$. Nous déduisons que si la barre est suffisamment courte $L \leq L_c = L_c(S\sigma_c)$, une et seulement une fissure apparaît à un point arbitraire dans la barre $x_1 \in [0, L]$, ensuite le saut de

déplacement $\llbracket u \rrbracket$ croît et la contrainte dans la barre F/S décroît continuellement lorsque l'on augmente le déplacement imposé. La barre est en décharge élastique dès que la fissure s'initie. La réponse de la barre unidimensionnelle est stable.

La figure 1.3 montre la réponse globale de la barre $F(U)$ dans les cas stable et instable (avec snap-back) avec un seul point de discontinuité.

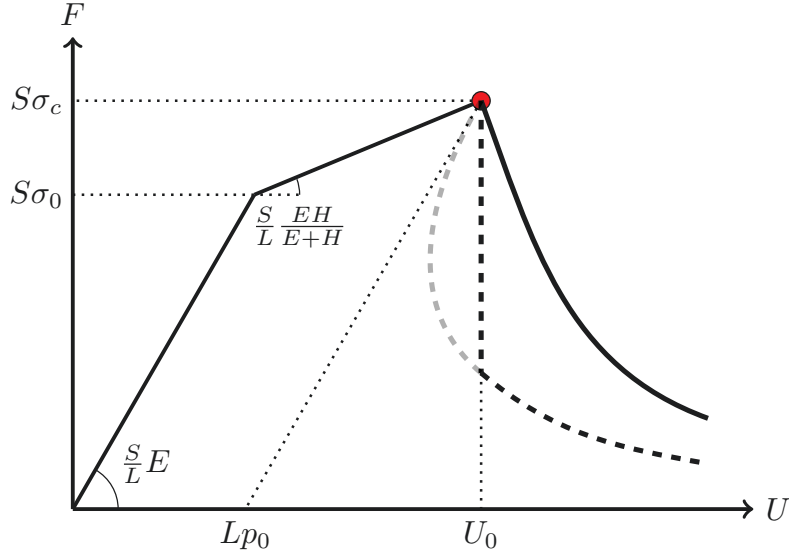


FIGURE 1.3 – La réponse globale de la barre $F(U)$ dans les cas stable et instable avec un seul point de discontinuité

1.3 Formulations du cas tridimensionnel

1.3.1 Comportement élastoplastique de la structure tridimensionnelle et formulation énergétique

Considérons une structure de dimension $N = 3$ en matériau élasto-plastique isotrope. Le système cartésien (x_1, x_2, x_3) avec sa base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sont utilisés. La configuration de référence de la structure est un ouvert borné, connect Ω de \mathbb{R}^N avec un bord régulier $\partial\Omega$. Le comportement élastoplastique isotrope du matériau est caractérisé par ses coefficients de Lamé (λ, μ) (ou de manière équivalente son module Young E et son coefficient de Poisson ν), le module d'écroutissage isotrope K_i et la contrainte critique de plasticité σ_y . La structure est soumise à la force volume de densité \mathbf{f} . La partie $\partial_D\Omega$ de la borne du domaine est soumise au déplacement imposé \mathbf{U} , tandis que la partie $\partial_N\Omega$ de la borne du domaine est soumise à la force imposée \mathbf{F} . Les chargements (\mathbf{U}, \mathbf{F}) sont fonctions croissantes monotonement du temps. Lorsque la fissure est présente au sein de la structure, le champ de déplacement \mathbf{u} admet un ensemble des discontinuités dénoté par $S_{\mathbf{u}}$. Cet ensemble est un hyperplan de dimension $N - 1$ dont le vecteur normal au point \mathbf{x} est dénoté par $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \in \mathbb{S}^2 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{n}\| = 1\}$. Le vecteur $\mathbf{u}^+(\mathbf{x})$ (respectivement,

$\mathbf{u}^-(\mathbf{x})$) désigne la limite du $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sur la lèvres supérieure (respectivement, inférieure) de la fissure

$$\mathbf{u}^\pm(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow 0: \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) > 0} \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Le saut de déplacement à ce point s'exprime comme suit

$$[[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^-(\mathbf{x}) \quad (1.53)$$

Le principe de non-pénétration induit que le saut normal de déplacement devrait être non-négatif sur l'ensemble des discontinuité

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{sur } S_{\mathbf{u}}$$

Le saut de déplacement normal est dénoté par $[[u_n]] := [[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\nu}$ et le saut de déplacement tangentiel est dénoté par $[[\mathbf{u}_t]] := [[\mathbf{u}]] - [[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}$. Dans l'ensemble des de discontinuités $S_{\mathbf{u}}$ du champ de déplacement \mathbf{u} , $S_{\mathbf{u}}^n$ (respectivement, $S_{\mathbf{u}}^t$) dénote la partie où le saut de déplacement est purement normal (respectivement, purement tangentiel)

$$S_{\mathbf{u}}^n := \{\mathbf{x} \in S_{\mathbf{u}} : [[\mathbf{u}_t]](\mathbf{x}) = 0\}, \quad S_{\mathbf{u}}^t := \{\mathbf{x} \in S_{\mathbf{u}} : [[u_n]](\mathbf{x}) = 0\}$$

En particulier, $[[u_n]] > 0$ sur $S_{\mathbf{u}} \setminus S_{\mathbf{u}}^t$. Notons $\mathcal{U}_{ad}(\mathbf{U})$ l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissible, *i.e.* l'ensemble des champs vectoriel satisfaisant les conditions aux limites cinématiques et admettant le saut normal non négatif à travers l'ensemble des discontinuité

$$\mathcal{U}_{ad}(\mathbf{U}) = \{\mathbf{u}^* \in H^1(\Omega \setminus S_{\mathbf{u}}, \mathbb{R}^N) : \mathbf{u}^* = \mathbf{U} \text{ sur } \partial_D \Omega, \quad [[u_n]](\mathbf{x}) \geq 0 \text{ sur } S_{\mathbf{u}}\} \quad (1.54)$$

où H^1 désigne l'espace vectoriel de Sobolev associé à la norme naturelle $\|\cdot\|_1$. Correspondant au déplacement imposé \mathbf{U} et à la force imposée \mathbf{F} donnés, chaque triple composé du déplacement $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}(\mathbf{U})$, déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et déformation plastique cumulée $p = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\tau)\| d\tau$ associe à l'énergie totale de la structure $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)$ étant une somme de l'énergie libre, l'énergie dissipée par plasticité, l'énergie surfacique de fissure et le potentiel des effort extérieurs

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p) = \mathcal{E}_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p) + \mathcal{E}_p(p) + \mathcal{E}_s(\mathbf{u}) + \mathcal{F}_{ext}(\mathbf{u}) \quad (1.55)$$

En utilisant (1.4) avec la densité d'énergie élastoplastique récupérable $\omega_p(p) = \frac{K_i}{1 + 1/m} p^{1+1/m}$ où m est une constante du matériau, on obtient

$$\mathcal{E}_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p) = \int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{u}}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + \frac{K_i}{1 + 1/m} p^{1+1/m} \right] d\Omega \quad (1.56)$$

L'énergie dissipée par plasticité garde la même forme donnée dans (1.5)

$$\mathcal{E}_p(p) = \sigma_y \int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{u}}} p d\Omega \quad (1.57)$$

Le potentiel des efforts extérieurs correspondant à la force volumique de densité \mathbf{f} et la force surfacique imposée \mathbf{F} sur $\partial_N \Omega$ s'écrit comme suit

$$\mathcal{F}_{ext}(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS \quad (1.58)$$

Par ailleurs, l'énergie de surface de fissuration s'exprime comme suit

$$\mathcal{E}_s(\mathbf{u}) = \int_{S_{\mathbf{u}}} \Phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \boldsymbol{\nu}) dS \quad (1.59)$$

Suite à l'isotropie du matériau, la densité d'énergie surfacique de fissure $\Phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \boldsymbol{\nu})$ dépend seulement des invariants de $(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \boldsymbol{\nu})$. Du fait que $\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$, deux invariants de $(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \boldsymbol{\nu})$ sont le saut de déplacement normal $\llbracket u_n \rrbracket = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\nu}$ et la norme du saut de déplacement tangentiel $\|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\| = \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}\|$. En conséquence, il existe une fonction ϕ définie sur $[0, +\infty)^2$ telle que la densité d'énergie surfacique de la fissure s'écrit sous la forme

$$\Phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \boldsymbol{\nu}) = \phi(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2, \mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}(\mathbf{U}) \quad (1.60)$$

La densité d'énergie surfacique s'annule quand $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = 0$, donc $\phi(0, 0) = 0$. Du fait que la densité d'énergie surfacique $\Phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \boldsymbol{\nu})$ est une fonction continue positive, ϕ est également une fonction continue positive. Néanmoins, elle n'est pas nécessairement différentiable, en particulier à l'origine $(0, 0)$. On fait l'hypothèse que la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \phi(\alpha, \beta)$ est une fonction continue sur $[0, +\infty)^2$ avec des propriétés suivantes

- (i) ϕ est différentiable continûment en tout point $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. $\phi_{,n}$ et $\phi_{,t}$ dénotent les deux dérivées partielles de ϕ

$$\phi_{,n} = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, \quad \phi_{,t} = \frac{\partial \phi}{\partial \beta}$$

- (ii) ϕ est dérivable directionnellement à l'origine, i.e. il existe une fonction φ homogène de degré 1 telle que $\forall (\alpha, \beta) : \alpha \geq 0, \beta \geq 0, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

$$0 < \varphi(\alpha, \beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \phi(h\alpha, h\beta), \quad \varphi(\lambda\alpha, \lambda\beta) = \lambda\varphi(\alpha, \beta) \quad (1.61)$$

σ_c et τ_c désignent les dérivées partielles de ϕ à l'origine :

$$\sigma_c = \varphi(1, 0) > 0, \quad \tau_c = \varphi(0, 1) > 0$$

Dans le cas où ϕ est dérivable à l'origine, φ est linéaire

$$\varphi(\alpha, \beta) = \sigma_c \alpha + \tau_c \beta$$

Dans cette formulation, (σ_c, τ_c) sont les constantes du matériau qui ont la dimension des contrainte. En fait, ils jouent les rôles des contraintes critiques du modèle de zone cohésive que l'on discutera plus en détails par la suite.

En injectant (1.56)-(1.60) dans (1.55), on obtient la formulation explicite de l'énergie totale de la structure

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p) &= \int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{u}}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + \frac{K_i}{1 + 1/m} p^{1+1/m} + \sigma_y p \right] d\Omega \\ &\quad + \int_{S_{\mathbf{u}}} \phi(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS \end{aligned} \quad (1.62)$$

Selon Définition 4, le triple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)$ est la solution du problème d'évolution de fissure cohésive au sein de la structure tridimensionnelle élastoplastique si et seulement s'il minimise localement l'énergie totale de la structure dans l'espace des champs admissibles des variables d'état. Pour $h > 0$ suffisamment petit, considérons les champs tests suivants

$$\mathbf{u}^* := \mathbf{u} + h\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p^* := \boldsymbol{\varepsilon}_p + h\boldsymbol{\zeta}, \quad p^* := p + h\sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\zeta}\| \quad (1.63)$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{v} \in \mathcal{D} := \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial_D \Omega, \llbracket v_n \rrbracket \geq 0 \text{ sur } (S_{\mathbf{v}} \setminus S_{\mathbf{u}}) \cup S_{\mathbf{u}}^t\} \\ \boldsymbol{\zeta} \text{ arbitraire} \end{cases} \quad (1.64)$$

En injectant les champs (1.63) dans la Définition 4 et développant jusqu'au deuxième ordre, on obtient l'inégalité

$$h\mathcal{E}'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\zeta}\|) + \frac{h^2}{2}\mathcal{E}''(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\zeta}\|) \geq 0 \quad (1.65)$$

Dans la formulation (1.65), les premier et deuxième termes concernent respectivement les dérivées première et seconde directionnelles de l'énergie totale de la structure par rapport au triple des variables d'état. Comme dans le cas unidimensionnel, cette inégalité conduit à l'étude des conditions de stabilité locale d'ordres 1 et 2

1. Condition de stabilité locale d'ordre 1

$$\mathcal{E}'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\zeta}\|) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}, \forall \boldsymbol{\zeta} \quad (1.66)$$

2. Condition de stabilité locale d'ordre 2

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}, \forall \boldsymbol{\zeta} \text{ tels que } \mathcal{E}'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\zeta}\|) = 0 : \quad \mathcal{E}''(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\zeta}\|) \geq 0 \quad (1.67)$$

On considère dans les sous sections suivantes les conditions de stabilité locale au cours de l'évolution de la fissure au sein de la structure tridimensionnelle.

1.3.2 Condition de stabilité locale d'ordre 1

La formulation du développement de la norme $\|\llbracket \mathbf{u}_t + h\mathbf{v}_t \rrbracket\|$ est différente dans $S_{\mathbf{u}}^n$ et dans $S_{\mathbf{u}} \setminus S_{\mathbf{u}}^n$

$$\|\llbracket \mathbf{u}_t + h\mathbf{v}_t \rrbracket\| = \begin{cases} h\|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\| + o(h) & \text{dans } S_{\mathbf{u}}^n \\ \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\| + h\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket \cdot \frac{\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket}{\|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|} + o(h) & \text{dans } S_{\mathbf{u}} \setminus S_{\mathbf{u}}^n \end{cases} \quad (1.68)$$

En dérivant l'énergie totale donnée dans (1.62) par rapport aux variables d'états dans la direction $(\mathbf{v}, \zeta, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\zeta\|)$ et utilisant (1.68), la condition de stabilité locale d'ordre 1 s'écrit explicitement comme suit $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}, \forall \zeta$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{u}}^*} \left[\mathbf{A}(\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon_p) \cdot (\varepsilon(\mathbf{v}) - \zeta) + \left(\sigma_y + K_i p^{1/m} \right) \sqrt{\frac{2}{3}} \|\zeta\| \right] d\Omega \\ & + \int_{S_{\mathbf{v}} \setminus S_{\mathbf{u}}} \varphi(v_n, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|) dS - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dS \\ & + \int_{S_{\mathbf{u}}^n} \left(\phi_{,n}(\llbracket u_n \rrbracket, 0) \llbracket v_n \rrbracket + \phi_{,t}(\llbracket u_n \rrbracket, 0) \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\| \right) dS \\ & + \int_{S_{\mathbf{u}} \setminus S_{\mathbf{u}}^n} \left(\phi_{,n}(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) \llbracket v_n \rrbracket + \phi_{,t}(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) \frac{\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket}{\|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|} \cdot \llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket \right) dS \geq 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Considérons les différents champs (\mathbf{v}, ζ) suivants

- (i) Choisissons des champs réguliers $\mathbf{v} \in \mathcal{D}$ tels que $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket = 0$ dans Ω et $\zeta = 0$, on en déduit les équations d'équilibre classiques et la condition aux limites

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus S_{\mathbf{u}} \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \mathbf{n} = 0 & \text{sur } S_{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial_N \Omega \end{cases} \quad (1.70)$$

Dans les équations d'équilibre, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}(\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon_p)$ désigne la contrainte locale dans la structure. En injectant (1.70) dans (1.69), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{u}}^*} \left[-\boldsymbol{\sigma} \cdot \zeta + \left(\sigma_y + K_i p^{1/m} \right) \sqrt{\frac{2}{3}} \|\zeta\| \right] d\Omega \\ & - \int_{S_{\mathbf{u}}^*} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{S_{\mathbf{v}} \setminus S_{\mathbf{u}}} \varphi(v_n, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|) dS \\ & + \int_{S_{\mathbf{u}}^n} \left(\phi_{,n}(\llbracket u_n \rrbracket, 0) \llbracket v_n \rrbracket + \phi_{,t}(\llbracket u_n \rrbracket, 0) \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\| \right) dS \\ & + \int_{S_{\mathbf{u}} \setminus S_{\mathbf{u}}^n} \left(\phi_{,n}(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) \llbracket v_n \rrbracket + \phi_{,t}(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) \frac{\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket}{\|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|} \cdot \llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket \right) dS \geq 0 \end{aligned} \quad (1.71)$$

- (ii) Choisissons $\zeta = 0$ et \mathbf{v} tel que $S_{\mathbf{v}} \cap S_{\mathbf{u}} = \emptyset$. Cela déduit que $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket = 0$ sur $S_{\mathbf{u}}$ et $S_{\mathbf{v}} \setminus S_{\mathbf{u}} = S_{\mathbf{v}}$. En injectant ces champs test dans (1.71), on a

$$\int_{S_{\mathbf{v}}} \left(\varphi(v_n, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|) - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \right) dS \geq 0$$

D'où

$$\varphi(\llbracket v_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|) \geq \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \quad (1.72)$$

En particulier, l'inégalité (1.72) est validée pour tous les champs $\mathbf{v} \in \mathcal{D}$ dans le cas où $S_{\mathbf{u}} \equiv \emptyset$, *i.e.* la structure est saine. Donc, (1.72) nous donne le critère en contrainte d'initiation de fissure cohésive au sein de la structure tridimensionnelle. Suite à la 1-homogénéité de la fonction φ , on peut réécrire ce critère pour un vecteur de saut unitaire $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{S}^2$

$$\varphi(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\nu}, \|\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}\|) \geq \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad \forall (\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \text{ tels que } \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\nu} \geq 0 \quad (1.73)$$

- (iii) Choisissons $\boldsymbol{\zeta} = 0$ et le champ test \mathbf{v} tel que l'ensemble des points de discontinuité de \mathbf{v} appartient dans celui de \mathbf{u} , *i.e.* $S_{\mathbf{v}} \setminus S_{\mathbf{u}} = \emptyset$, (1.71) devient

$$\begin{aligned} & - \int_{S_{\mathbf{u}}^*} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{S_{\mathbf{u}}^n} \left(\phi_{,n}(\llbracket u_n \rrbracket, 0) \llbracket v_n \rrbracket + \phi_{,t}(\llbracket u_n \rrbracket, 0) \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\| \right) dS \\ & + \int_{S_{\mathbf{u}} \setminus S_{\mathbf{u}}^n} \left(\phi_{,n}(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) \llbracket v_n \rrbracket + \phi_{,t}(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) \frac{\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket}{\|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|} \cdot \llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket \right) dS \geq 0 \end{aligned}$$

En décomposant la contrainte en composantes normale et tangentielle $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \Sigma \boldsymbol{\nu} + \mathbf{T}$ où $\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ et sachant que $\llbracket v_n \rrbracket$ est non-négatif sur $S_{\mathbf{u}}^n$ mais arbitraire ailleurs, $\|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\| \geq 0$ pour tout \mathbf{v} , on en déduit les propriétés des composantes dans contraintes sur chaque partie de $S_{\mathbf{u}}$

$$\begin{cases} \Sigma = \phi_{,n}(\llbracket u_n \rrbracket, 0), & \mathbf{T} \leq \phi_{,t}(\llbracket u_n \rrbracket, 0) & \text{sur } S_{\mathbf{u}}^n \\ \Sigma \leq \phi_{,n}(0, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|), & \mathbf{T} = \phi_{,t}(0, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) & \text{sur } S_{\mathbf{u}}^t \\ \Sigma = \phi_{,n}(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|), & \mathbf{T} = \phi_{,t}(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|) & \text{sur } S_{\mathbf{u}} \setminus (S_{\mathbf{u}}^n \cup S_{\mathbf{u}}^t) \end{cases} \quad (1.74)$$

- (iv) Choisissons $\mathbf{v} = 0$. En injectant ce champ test dans (1.71), on obtient l'inégalité élasto-plastique locale

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\zeta} + \left(\sigma_y + K_i p^{1/m} \right) \sqrt{\frac{2}{3}} \|\boldsymbol{\zeta}\| \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \quad (1.75)$$

L'inégalité (1.75) nous donne un critère de plasticité avec l'écrouissage isotrope

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}\| - \left(\sigma_y + K_i p^{1/m} \right) \leq 0 \quad (1.76)$$

Dans un cas particulier où on prend en compte une propriété supplémentaire des champs de déformation plastique $\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_p = \text{tr} \boldsymbol{\zeta} = 0$, (1.76) devient le critère de plasticité de Von-Mises

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}\| - \left(\sigma_y + K_i p^{1/m} \right) \leq 0 \quad (1.77)$$

où \mathbf{s} dénote la partie déviatorique du champ $\boldsymbol{\sigma}$.

Remarque 6. La condition de stabilité locale d'ordre 1 nous donne des résultats importants concernant l'équilibre de l'état et les critères de plasticité et de zone cohésive

- Les équations d'équilibre (1.70) et le critère de plasticité (1.76) peuvent s'exprimer comme des résultats naturels du principe de minimisation d'énergie. La formulation du critère de plasticité est en fait cohérente avec les formes de l'énergie libre et de l'énergie dissipée par plasticité écrites dans (1.56) et (1.57). Le critère de plasticité est représenté comme une ellipse dans le plan des contraintes dont la taille dépend de la déformation plastique cumulée p au point considéré. En particulier, l'ellipse de limite d'élasticité s'agrandit monotonement en temps.
- A partir de la condition de stabilité d'ordre 1, on en déduit les expressions (1.74) des composantes de contraintes dans différentes parties de l'ensemble des discontinuités $S_{\mathbf{u}}$ du champ de déplacement \mathbf{u} données par les sous-dérivées de la densité d'énergie surfacique de fissure et également le critère d'initiation de fissure cohésive en contrainte exprimé dans (1.72). Ce critère est représenté par une courbe cohésive dans le plan des contraintes dont la forme dépend de la formulation de la densité d'énergie surfacique cohésive. Quelques exemples des courbes cohésives intrinsèques dans les cas particuliers sont présentés par la suite. Il faudrait noter que cette courbe est une propriété intrinsèque du matériau qui n'évolue pas avec le chargement, ainsi ne dépend pas de la déformation plastique cumulée.
- Afin d'étudier la couplage entre la plasticité et l'évolution de fissure cohésive, on devrait mettre en comparaison l'ellipse de limite d'élasticité et la courbe cohésive intrinsèque. Dans le cas où la courbe cohésive intrinsèque est à l'intérieur de la limite d'élasticité correspondant à $p = 0$, cette configuration est toujours valable suite à l'agrandissement monotone de la limite d'élasticité. Donc la phase purement élastique est suivie de l'évolution de fissure cohésive et la plasticité n'est jamais présente. En conséquence, on retrouve les résultats concernant l'évolution de fissure cohésive dans un milieu purement élastique présenté dans [Charlotte et al., 2000; Charlotte et al., 2006]. Par ailleurs, le cas où la courbe cohésive intrinsèque n'est pas à l'intérieur de la limite d'élasticité correspondant à $p = 0$ est très délicat. En effet, des zones en décharge élastique existe à côté des zones élastoplastique du fait que la contrainte est en général non-uniforme.

1.3.2.1 Exemples des critères de plasticité et de zone cohésive

Afin de visualiser concrètement la comparaison entre les critères de plasticité et de zone cohésive dans le plan des contraintes, on considère la réponse de la structure dans l'essai bi-axial. Pendant cet essai, le tenseur de contrainte est diagonal dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et s'écrit sous la forme suivante

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

Supposons que la structure est toujours en traction bi-axiale, donc $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$. Le critère de plasticité de Von-Mises donné dans (1.77) devient

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \leq \sigma_y + K_i p^{1/m}$$

Ceci correspond à une ellipse centrée à $(0, 0)$ dans le plan des contraintes (σ_1, σ_2) dont le demi grand axe est suivant la première bissectrice et vaut $\sqrt{2}(\sigma_y + K_i p^{1/m})$ et le demi petit axe est orienté suivant la deuxième bissectrice et vaut $\sqrt{2/3}(\sigma_y + K_i p^{1/m})$. Sachant que $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$, la limite d'élasticité se situe au quadrant I et est bornée par l'arc d'ellipse d'excentricité $\sqrt{2/3}$

passer par les points $(\sigma_y + K_i p^{1/m}, 0)$, $(\sigma_y + K_i p^{1/m}, \sigma_y + K_i p^{1/m})$, $(0, \sigma_y + K_i p^{1/m})$. Du fait que la déformation plastique cumulée p est une fonction croissante du temps, la taille de la limite d'élasticité augmente monotonement en temps.

Par ailleurs, la courbe cohésive intrinsèque dépend de la formulation de la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive ϕ . En particulier,

(i) *Cas où $\phi(\llbracket u_n \rrbracket, \llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket)$ est différentiable à l'origine.* Le critère d'initiation de fissure cohésive (1.72) consiste à un critère de traction maximale, caractérisé par la contrainte critique cohésive de traction σ_c , et un critère de cisaillement maximal, caractérisé par la contrainte critique cohésive de cisaillement τ_c

$$\max(\sigma_1, \sigma_2) \leq \sigma_c, \quad |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \tau_c$$

Dans le cas pratique, on suppose que $\tau_c < \sigma_c$. Ainsi, la courbe cohésive intrinsèque dans le plan des contraintes (σ_1, σ_2) est un hexagone situé au quadrant I qui passe par les points $(\tau_c, 0)$, $(\sigma_c, \sigma_c - \tau_c)$, (σ_c, σ_c) , $(\sigma_c - \tau_c, \sigma_c)$, $(0, \tau_c)$. Selon les valeurs de $(\sigma_y, \tau_c, \sigma_c)$, on a trois configurations possibles suivantes des critères de plasticité et de zone cohésive

- Si $\tau_c < \sigma_c < \sigma_y$: la courbe cohésive intrinsèque est à l'intérieur de la limite d'élasticité correspondant à $p = 0$ et donc $\forall p$. Dans ce cas, la phase purement élastique est suivie de l'évolution de fissure cohésive et la plasticité n'est jamais présente.
- Si $\tau_c < \sigma_y \leq \sigma_c$: une partie de la courbe cohésive intrinsèque est à l'extérieur de la limite d'élasticité correspondant à $p = 0$. Selon l'état du champ de contrainte, la phase élastique est suivie de la phase élastoplastique et l'initiation de fissure cohésive, ou la fissure cohésive s'initie à la fin de la phase élastique sans passer par la phase élastoplastique.
- Si $\sigma_y \leq \tau_c < \sigma_c$: l'entière courbe cohésive intrinsèque est à l'extérieur de la limite d'élasticité correspondant à $p = 0$. Sachant que la limite d'élasticité s'agrandit avec la déformation plastique cumulée p au cours du temps, la courbe cohésive intrinsèque intersecte avec la borne de la limite d'élasticité correspondant à $p \geq 0$. Associant à cette intersection, une fissure cohésive s'initie au sein de la zone plastifiée de la structure.

Ces trois configurations des critères de plasticité et de zone cohésive dans le plan des contraintes sont représentées dans la figure (1.4).

(ii) *Cas où $\phi(\llbracket u_n \rrbracket, \llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket)$ est seulement directionnellement différentiable à l'origine.* Le critère d'initiation de fissure cohésive (1.72) s'exprime comme suit

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma_1|}{2} \leq \varphi^* \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} \right)$$

où

$$\varphi^*(\Sigma) = \inf_{\lambda \geq 0} \left\{ \varphi(\lambda, 1) - \lambda \Sigma \right\}$$

La démonstration est détaillée dans [Charlotte et al., 2006]. Comme dans le cas précédent, trois configurations sont possibles

- La courbe cohésive intrinsèque est à l'intérieur de la limite d'élasticité correspondant à $p = 0$ et donc $\forall p$

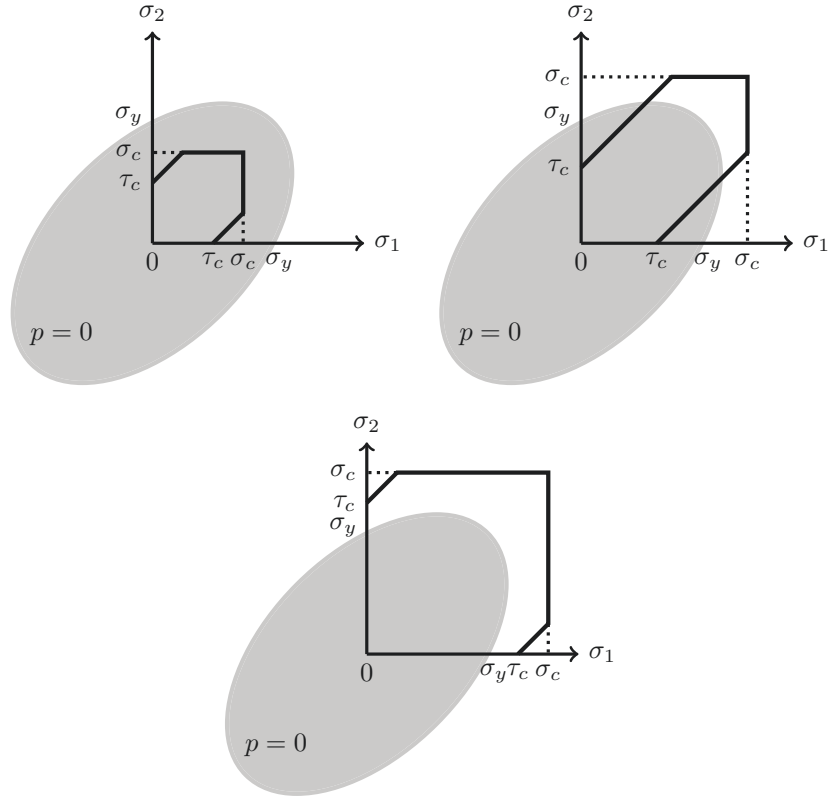


FIGURE 1.4 – Trois configurations possibles des critères de plasticité et de zone cohésive dans le plan des contraintes lorsque $\phi(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|)$ est différentiable à l'origine

- Une partie de la courbe cohésive intrinsèque est à l'extérieur de la limite d'élasticité correspondant à $p = 0$.
- L'entière de la courbe cohésive intrinsèque est à l'extérieur de la limite d'élasticité correspondant à $p = 0$.

Ces trois configurations des critères de plasticité et de zone cohésive dans le plan des contraintes sont représentées dans la figure (1.5).

1.3.3 Condition de stabilité locale d'ordre 2

La condition de stabilité locale d'ordre 1 est nécessaire mais pas suffisante pour que la stabilité locale (1.65) soit validée, donc on devra prendre en compte la condition de stabilité locale d'ordre 2 donnée dans (1.67). L'étude de cette condition consiste à deux questions suivantes qui devraient être répondues l'une après l'autre

- Avec quelles conditions et/ou correspondant à quels champs tests $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})$, la dérivée première directionnelle de l'énergie totale par rapport aux variables d'état $\mathcal{E}'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\zeta}\|)$

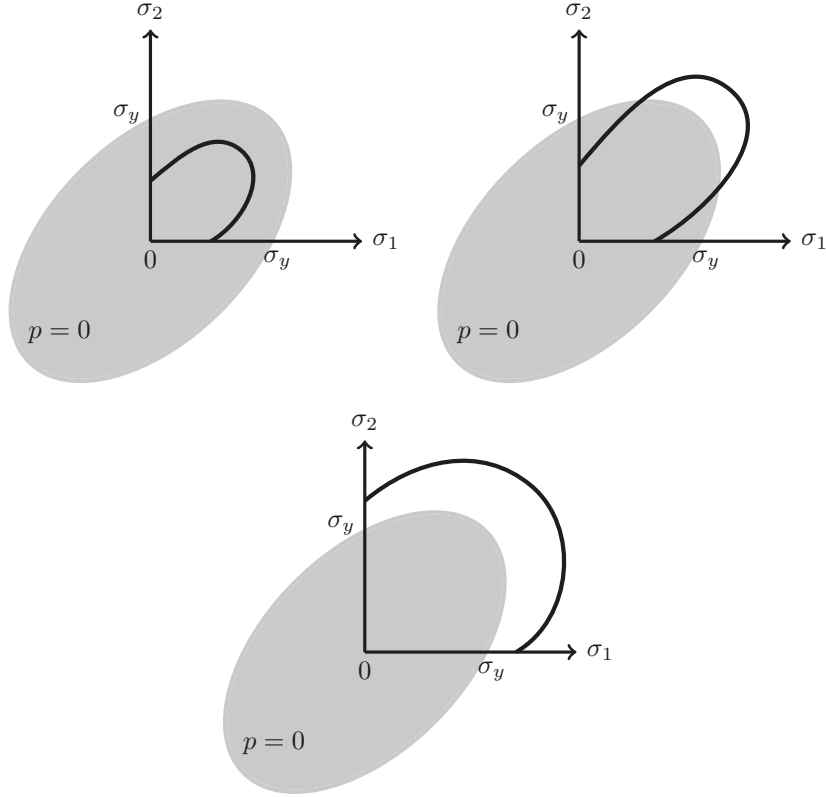


FIGURE 1.5 – Trois configurations possibles des critères de plasticité et de zone cohésive dans le plan des contraintes lorsque $\phi(\llbracket u_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{u}_t \rrbracket\|)$ est seulement directionnellement différentiable à l'origine

s'annule, *i.e.* l'inégalité (1.71) devient une égalité ?

- En admettant telles conditions et/ou choisissant tels champs tests, la dérivée seconde directionnelle de l'énergie totale $\mathcal{E}''(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\zeta}\|)$ est-elle non-négative ?

Suite à la non-uniformité du champ de contrainte, la structure entière n'est pas en décharge élastique lorsque la fissure est présente comme dans le cas unidimensionnel (voir la Proposition 1). Ainsi, il est possible que l'une zone \mathcal{C} en décharge élastique apparaisse dans un voisinage de la fissure mais hors de cette zone, la déformation plastique continue à évoluer, *i.e.* $\dot{p}(\mathbf{x} \notin \mathcal{C}) > 0$. On considère la condition de stabilité locale d'ordre 2 dans deux configurations suivantes : *structure plastifiée sans fissure* et *structure fissurée*.

1.3.3.1 Structure plastifiée sans fissure

Dans cette configuration, à partir de (1.71), (1.72) et (1.76), la dérivée première directionnelle de l'énergie totale par rapport aux variables d'état $\mathcal{E}'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p)(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\zeta}\|)$ s'annule seulement

si

$$\begin{cases} S_{\mathbf{u}} = \emptyset \\ \exists \mathbf{x} \in \Omega, \exists (\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \text{ tel que } \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\nu} \geq 0 \\ \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\delta} = \varphi(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\nu}, \|\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}\|) \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}\| = \sigma_y + K_i p^{1/m} \text{ et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\zeta} \geq 0 \quad \text{dans } \mathcal{V}_{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\zeta} = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{V}_{\mathbf{x}} \end{cases}$$

où $\mathcal{V}_{\mathbf{x}} \in \Omega$ désigne un voisinage du \mathbf{x} . Donc, le critère de zone cohésive est atteint au point \mathbf{x} du domaine et le critère de plasticité est atteint dans une zone du domaine autour de \mathbf{x} . Ce cas correspond à l'initiation d'une fissure cohésive au sein de la zone plastifiée du domaine. Hors de la zone $\mathcal{V}_{\mathbf{x}}$, le domaine admet toujours la solution purement élastique. L'espace des champs tests admissibles introduit dans (1.64) devient

$$\begin{cases} \mathcal{D}_p &:= \{ \mathbf{v} : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial_D \Omega, \llbracket v_n \rrbracket \geq 0 \text{ sur } S_{\mathbf{v}} \subset \mathcal{V}_{\mathbf{x}} \} \\ \mathcal{P} &:= \{ \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\zeta} \geq 0 \text{ dans } \mathcal{V}_{\mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\zeta} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \mathcal{V}_{\mathbf{x}} \} \end{cases}$$

En injectant (1.55)-(1.59) dans (1.67), la condition de stabilité locale d'ordre 2 s'écrit sous la forme d'intégrale $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}_p, \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{v}}} \left[\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\zeta}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\zeta}) + \frac{2}{3m} K_i p^{1/m-1} \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 \right] d\Omega \\ + \int_{S_{\mathbf{v}}} \chi(\llbracket v_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|) dS \geq 0 \end{aligned} \quad (1.78)$$

Dans cette formulation, χ désigne la dérivée directionnelle de la fonction φ à l'origine qui est définie négative et homogène de degré 2, *i.e.* $\forall (\alpha, \beta) : \alpha \geq 0, \beta \geq 0, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

$$0 \geq \chi(\alpha, \beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \varphi(h\alpha, h\beta), \quad \chi(\lambda\alpha, \lambda\beta) = \lambda^2 \chi(\alpha, \beta) \quad \forall \lambda > 0$$

On étudie deux cas possibles du chargement à la borne du domaine $\partial\Omega$

- *Force imposée sur une partie non-vide de la borne du domaine.* Dans ce cas, $\partial_N \Omega \neq \emptyset$. Rappelons que $\mathbf{v} = 0$ sur la partie $\partial_D \Omega$ mais arbitraire sur la partie $\partial_N \Omega$ de la borne. La formule d'intégration de Green nous donne

$$\int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{v}}} \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_{\mathbf{v}}} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\nu} dS \quad (1.79)$$

Choisissons les champs tests admissible $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathcal{D}_p \times \mathcal{P}$ respectant les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \boldsymbol{\zeta} &= 0 & \text{dans } \Omega \setminus S_{\mathbf{v}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) &= 0 & \text{dans } \Omega \setminus S_{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &> 0 & \text{sur } \partial_N \Omega \end{cases}$$

En injectant ces champs dans (1.79), on a

$$\int_{S_v} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS > 0$$

Ainsi, la condition de stabilité locale d'ordre 2 donnée dans (1.78) de l'énergie totale devient :

$$\int_{S_v} \chi(\llbracket v_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|) dS \geq 0$$

Cette condition ne peut pas être validée du fait que $\chi(\llbracket v_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|)$ est définie négative. En conséquence, dans le cas où la force est imposée sur une partie non-vide de la borne du domaine, *i.e.* $\partial_N \Omega \neq \emptyset$, la solution correspondant à $\mathcal{E}'(\mathbf{u}, \varepsilon_p, p)(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \llbracket \boldsymbol{\zeta} \rrbracket) = 0$ est **instable**.

• *Borne $\partial\Omega$ totalement contrôlée en déplacement.* Dans ce cas, $\partial_N \Omega = \emptyset$, ainsi $\partial\Omega \equiv \partial_D \Omega$ et $\mathbf{v} = 0$ sur $\partial\Omega$. L'intégral de Green peut se réécrire :

$$\int_{\Omega \setminus S_v} \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\Omega = - \int_{S_v} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\nu} dS$$

Introduisons la grandeur suivante

$$\lambda = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{D}_p, \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{P}} \left\{ k(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) = \int_{\Omega \setminus S_v} \left[\mathbf{A}(\varepsilon(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\zeta}) \cdot (\varepsilon(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\zeta}) + \frac{2}{3m} K_i p^{1/m-1} \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 \right] d\Omega + \int_{S_v} \chi(\llbracket v_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|) dS \right\} \quad (1.80)$$

Afin de considérer la stabilité locale d'ordre 2, il nous faudrait identifier λ , ensuite comparer cette valeur critique avec 0. Nous cherchons la valeur minimale de la fonction de deux variables $k(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})$ par la minimisation alternative. Tout d'abord, La dérivée directionnelle de k dans la direction $(0, \boldsymbol{\kappa})$ est étudiée pour séparer les deux variables

$$k'(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})(0, \boldsymbol{\kappa}) = \int_{\Omega \setminus S_v} \left[-2\mathbf{A}(\varepsilon(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\zeta}) + \frac{4}{3m} K_i p^{1/m-1} \boldsymbol{\zeta} \right] \cdot \boldsymbol{\kappa} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{P}$$

On en déduit que

$$\mathbf{A}(\varepsilon(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\zeta}) = \frac{2}{3m} p^{1/m-1} \boldsymbol{\zeta}$$

D'où on obtient une relation suivante entre deux champs tests $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})$ qui minimisent la fonction $k(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})$

$$\boldsymbol{\zeta} = \left(\mathbf{A} + \frac{2}{3m} K_i p^{1/m-1} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{v}) = \mathbf{B} \varepsilon(\mathbf{v}) \quad (1.81)$$

Dans cette formulation, \mathbf{I} désigne le tenseur unitaire d'ordre 4, \mathbf{B} est également un tenseur d'ordre 4 qui dépend du tenseur de rigidité \mathbf{A} , du module d'écrouissage, de la loi de plasticité

et de la déformation plastique cumulée réelle p correspondant à $\mathcal{E}'(\mathbf{u}, \varepsilon_p, p)(\mathbf{v}, \zeta, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\zeta\|)$. En remplaçant (1.81) dans (1.80), la fonction k devient une fonction \bar{k} d'une seule variable \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \bar{k}(\mathbf{v}) = & \int_{\Omega \setminus S_v} \left[(\mathbf{I} - \mathbf{B})^t \mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{B}) + \frac{2}{3m} p^{1/m-1} \mathbf{B}^t \mathbf{B} \right] \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ & + \int_{S_v} \chi(\llbracket v_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|) \, dS \end{aligned}$$

L'étude de la condition de stabilité locale d'ordre 2 exprimée dans (1.78), ainsi le problème de minimisation (1.80), peut être reformulés en introduisant le *coefficient de Rayleigh* $\mathcal{R}(\mathbf{v})$ comme suit

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}) = \frac{\int_{\Omega \setminus S_v} \left[(\mathbf{I} - \mathbf{B})^t \mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{B}) + \frac{2}{3m} p^{1/m-1} \mathbf{B}^t \mathbf{B} \right] \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega}{\left| \int_{S_v} \chi(\llbracket v_n \rrbracket, \|\llbracket \mathbf{v}_t \rrbracket\|) \, dS \right|} \quad (1.82)$$

En conséquence, la stabilité des champs de solution $(\mathbf{u}, \varepsilon_p, p)$ correspondant à $\mathcal{E}'(\mathbf{u}, \varepsilon_p, p)(\mathbf{v}, \zeta, \sqrt{\frac{2}{3}}\|\zeta\|) = 0$ est donc équivalente à l'inégalité suivante

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathcal{D}_p} \mathcal{R}(\mathbf{v}) \geq 1$$

Ainsi, on devrait chercher le champ test de déplacement $\mathbf{v} \in \mathcal{D}_p$ qui minimise le coefficient de Rayleigh \mathcal{R} et compare cette valeur minimale du dernier à l'unité.

1.4 Conclusion du chapitre

On a construit dans ce chapitre la résolution du problème d'initiation et de propagation de fissure cohésive en mettant place les énergies dissipées par la fissure cohésive et par la plasticité dans la formulation variationnelle. Dans un premier temps, l'exemple d'une barre unidimensionnelle du matériau élastoplastique adoptant la loi cohésive de type Barenbaltt sous chargement en déplacement imposé est traité analytiquement. En supposant que la contrainte critique cohésive σ_c est plus grande que la contrainte critique de plasticité σ_y , la phase élastique dans la barre est suivie de la phase élastoplastique, ensuite la fissure cohésive s'initie dès que la contrainte homogène dans la barre atteint σ_c . Les équations d'équilibre, les critères de plasticité et de zone cohésive sont déduits naturellement à partir de la condition de stabilité locale d'ordre 1. Les effets d'échelle sont mis en évidence en étudiant la condition de stabilité locale d'ordre 2. En effet, si la longueur de la barre L est inférieure à une longueur critique L_c dépendant du module Young et de la dérivée seconde de la densité d'énergie surfacique cohésive par rapport au saut de déplacement, la solution au seuil cohésif est stable. De plus, lorsque l'on continue à augmenter le déplacement imposé, la solution est toujours stable et la fissure cohésive évolue progressivement au sein de la barre, *i.e.* la contrainte est une fonction continue, décroissante en temps après l'initiation de la fissure cohésive. Dans le cas contraire où $L \geq L_c$, la solution au seuil cohésif est instable et la contrainte chute brutalement à cet instant. Ceci est dû à la présence du snap-back sur la courbe de la réponse globale force-déplacement. Si les effets d'inertie sont négligés,

le point final de la chute peut être identifié par la conservation d'énergie. On remarque que la longueur critique L_c ne dépend pas du module d'écrouissage de plasticité et elle est identique au cas purement élastique.

Dans un deuxième temps, les formulations énergétiques sont généralisées pour le cas d'une structure multidimensionnelle du matériau élastoplastique adoptant la loi cohésive de type Barenblatt. En utilisant la condition de stabilité locale d'ordre 1, on retrouve les équations d'équilibre, le critère de plasticité sous la forme d'une ellipse et le critère de zone cohésive sous la forme d'une courbe intrinsèque dans le plan des contraintes. Néanmoins, en raison de la non-uniformité du champ de contrainte au sein de la structure, l'étude de la stabilité de la solution avec la condition de stabilité locale d'ordre 2 devient très délicate. On peut formuler le problème de stabilité de la solution à l'initiation de fissure cohésive en introduisant le coefficient de Rayleigh. Au cours de l'évolution de fissure, une zone en décharge élastique autour de la fissure cohésive et la zone élastoplastique «loin» de la fissure pourraient exister en même temps. Ce problème compliqué ne nous permet pas d'obtenir une solution analytique complète. La simulation numérique par la méthode d'élément fini est ainsi nécessaire. On étudiera dans le chapitre suivant la nucléation de la fissure au sein de la structure bidimensionnelle de comportement *purement élastique* en prenant en compte des effets du champ de contrainte non-uniforme. Laissant de côté le couplage plasticité-fissuration, le chapitre 2 donne une vision analytique complète de l'évolution de la fissure, de purement cohésive à partiellement non-cohésive, en s'appuyant sur les hypothèses de Dugdale dans un premier temps et de Barenblatt dans un deuxième temps.

Chapitre 2

Effets du champ de contrainte non-uniforme sur l'évolution de la fissure cohésive

Sommaire

2.1	Introduction	40
2.1.1	Nucléation de fissure et stabilité de l'évolution de fissure utilisant le modèle de zone cohésive	40
2.1.2	Nucléation et propagation de fissure à partir d'un point régulier	42
2.2	Description du problème et hypothèses	42
2.2.1	La structure, son comportement élastique et le chargement	42
2.2.2	Symétrie et hypothèses de régularité	44
2.2.3	La loi cohésive de type Dugdale	45
2.2.4	Formulations de l'approche variationnelle de l'évolution de fissure	46
2.3	Résolution du problème d'évolution de fissure	49
2.3.1	Réduction du problème avec les hypothèses de symétrie	49
2.3.2	Calculs analytiques avec l'approche à deux échelles	52
2.3.3	Représentation des trois branches	58
2.3.4	Discussion	60
2.3.5	Comparaison avec le modèle de Griffith	66
2.4	Généralisation du problème par la série de distribution de contrainte normale	68
2.4.1	Calculs analytiques avec l'approche à deux échelles	69
2.4.2	Représentation des trois branches dans des cas particuliers	73
2.5	Généralisation du problème avec la loi cohésive de type Barenblatt	81
2.5.1	La loi cohésive de type Barenblatt	82
2.5.2	Formulation des calculs avec l'approche à deux échelles du cas général de la loi cohésive de type Barenblatt	84
2.5.3	Cas particulier de la loi cohésive linéaire de type Barenblatt	88
2.6	Conclusion du chapitre	95

Objectifs du chapitre

Dans la réalité industrielle, le champ de contrainte au sein de la structure est en générale non uniforme. Cette non-uniformité du champ de contrainte est due à plusieurs facteurs, dont l'hétérogénéité du matériau, le chargement appliqué, l'irrégularité géométrique. Le champ de contrainte non-uniforme permet de localiser le site d'amorçage de fissure et d'empêcher la propagation brutale de la fissure dans la structure. Ce chapitre est consacré aux études de nucléation et propagation de la fissure cohésive au sein de la structure bidimensionnelle élastique en prenant en compte l'effet de stabilisation du gradient du champ de contrainte. L'évolution de la fissure est gérée par le modèle de zone cohésive de type Dugdale dans un premier temps et de type Barenblatt dans un deuxième temps. En particulier, on introduit une longueur caractéristique ℓ liée à la non-uniformité du champ de contrainte dans un voisinage du point où la fissure est initiée. L'évolution de la fissure contient deux phases, dont la première de la fissure purement cohésive puis la deuxième de la fissure partiellement non-cohésive. Dans la première phase, toute la fissure est soumise à des forces cohésives (de type Dugdale ou de type Barenblatt) et dans la deuxième phase, une partie libre de contrainte apparaît au centre de la fissure. Supposant que la longueur caractéristique d_c associée au comportement élastique du matériau et la loi cohésive est très petite devant la taille L de la structure, le problème d'évolution de fissure est formulé dans l'approche à deux échelles utilisant l'analyse complexe. La solution de l'évolution de fissure peut être exprimée sous la forme analytique dans le cas de la loi cohésive de type Dugdale et étudiée semi-analytiquement grâce à la méthode des polynômes de Tchebychev dans le cas de la loi cohésive de type Barenblatt. On montre que la propagation de la fissure est stable lors de la première phase mais devient instable avec un saut brutal de la longueur de fissure dès que la partie non-cohésive apparaît au centre de la fissure. L'influence des paramètres, en particulier deux longueurs caractéristiques (d_c, ℓ) , sur l'évolution de la fissure est discutée. La sensibilité de la solution à la taille du défaut préexistant au sein de la structure est également étudiée.

2.1 Introduction

2.1.1 Nucléation de fissure et stabilité de l'évolution de fissure utilisant le modèle de zone cohésive

Une des lacunes les plus importantes du modèle classique de Griffith est l'incapacité de modéliser le phénomène d'initiation de la fissure. En effet, le modèle de Griffith est basé sur le concept du taux de restitution d'énergie G et le critère de propagation de fissure s'écrit sous la forme $G \leq G_c$. Néanmoins, le taux de restitution d'énergie G tend vers 0 lors que la longueur de la fissure tend vers 0. D'ailleurs, la contrainte au tour de la pointe \mathbf{O} de la fissure est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{r}}$ où r signifie la distance entre le point considéré et le point \mathbf{O} , donc la contrainte est singulière en pointe de la fissure. Le modèle de zone cohésive et l'approche variationnelle nous donnent un outil efficace afin d'affranchir des problèmes posés dans le cadre du modèle de

Griffith. Basée sur des résultats de l'approche variationnelle et du critère de stabilité présentés dans le cas unidimensionnel par [Del Piero, 1999], la comparaison entre deux modèles peut être réalisée dans la restriction 1D [Charlotte et al., 2000]. En particulier, en supposant que la densité d'énergie surfacique de fissure est une fonction $\Phi(\llbracket u \rrbracket)$ continue, croissante et concave du saut de déplacement $\llbracket u \rrbracket$, la condition de stabilité d'ordre 1 induit que le champ de contrainte $\sigma(x)$ à l'équilibre devrait être par tout plus petit que la dérivée à 0 de la densité d'énergie surfacique $\sigma(x) \leq \sigma_c := \Phi'(0)$. Ainsi, σ_c joue le rôle de la contrainte critique du matériau. En plus, la condition de stabilité d'ordre 2 nous donne une valeur critique de la longueur de la barre au delà de laquelle l'évolution de la fissure est instable et la contrainte dans la barre chute brutalement lorsque le déplacement imposé continue à augmenter après la nucléation de la fissure cohésive. Ce résultat peut être généralisé pour le problème tridimensionnel. En supposant que le matériau est isotrope, la densité d'énergie surfacique de fissure est seulement une fonction du saut normal de déplacement et de la norme du saut tangentiel de déplacement à travers la surface de discontinuité, dénotée par $\Phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n}, \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\|)$ où \mathbf{n} désigne le vecteur normal de la fissure. Grâce aux travaux de [Laverne et Marigo, 2004] et [Charlotte et al., 2006], le critère d'initiation de fissure cohésive s'écrit sous la forme d'une courbe intrinsèque dans le plan des contraintes de Mohr. Dans ce critère, la dérivée directionnelle à $(0,0)$ de la fonction Φ joue un rôle essentiel. En particulier, lorsque Φ admet les dérivées partielles à $(0,0)$, le critère d'initiation de fissure devient simplement deux critères de cisaillement maximal et de traction maximale

$$\max_{\mathbf{n}: \|\mathbf{n}\|=1} \|\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \sigma_{nn} \mathbf{n}\| \leq \tau_c, \quad \max_{\mathbf{n}: \|\mathbf{n}\|=1} \sigma_{nn} \leq \sigma_c$$

où τ_c et σ_c désignent respectivement la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale maximale auxquelles le matériau peut supporter. Ce résultat fait un lien fondamental entre le critère d'initiation de fissure cohésive et les critères standards de résistance des matériaux proposés par les ingénieurs au début du vingtième siècle.

Néanmoins, ce résultat dit seulement que la fissure devrait apparaître quelque part dans la structure lorsque le champ de contrainte du problème élastique atteint un seuil, mais la question concernant l'évolution de la fissure reste encore ouverte. Afin de résoudre ce problème délicat, une formulation unique contenant la nucléation et la propagation de fissure devrait être construite. L'utilisation de l'approche variationnelle nous donne des résultats très prometteurs, voir [Bourdin et al., 2008]. Dans le contexte des modèles d'interface, certains résultats partiels avec plusieurs problématiques différents sont obtenus. Par exemple, la propagation de la fissure au sein des matériaux composites sont étudiée dans les travaux de [Monerie, 2000; Raous et Monerie, 2002] en s'appuyant sur la zone cohésive entre les fibres et la matrice. Les formulations dynamiques du modèle cohésif sont établies dans [Monerie et Acary, 2001]. L'utilisation des modèles d'interface dans la construction de maçonnerie est présentée dans [Fouchal et al., 2009]. Par ailleurs, [Ferdjani et al., 2007; Ferdjani et al., 2009] étudient les effets de la taille et de la forme des défauts pré-existants au sein de la structure dans le cadre du modèle cohésif de type Dugdale. Les auteurs démontrent que la nucléation de la fissure cohésive dépend fortement à la forme du défaut mais des défauts suffisamment petits n'ont pas d'influence sur la résistance globale de la structure. À côté des résultats concernant les effets des défauts pré-existants, le problème de nucléation et de propagation de fissure cohésive de type Dugdale à partir d'une entaille est considéré dans [Dang et al., 2013; Dang et al., 2014]. Dans telle situation, la fissure cohésive est initiée dès que le

chargement est appliqué. La longueur et l'ouverture de fissure évoluent de manière qu'il n'existe pas de singularité de contrainte en pointe de la fissure. Quand la fissure est purement cohésive, l'évolution de la fissure est stable mais devient instable lorsque l'ouverture de la fissure à l'entaille atteint le saut critique δ_c du modèle de Dugdale. En conséquence, la fissure macroscopique se crée dont la longueur est identifiée grâce à la conservation d'énergie. Dans ces travaux, la technique à deux échelles est utilisée pour obtenir les résultats analytiques en supposant que la longueur caractéristique du matériau, liant au comportement élastique et à la loi cohésive, est très petite devant les dimensions du domaine.

2.1.2 Nucléation et propagation de fissure à partir d'un point régulier

Le problème considéré dans ce chapitre est similaire à celui étudié dans [Dang et al., 2013; Dang et al., 2014] mais la structure est différente. En effet, on suppose que la structure ne contient ni entaille ni coin qui peuvent produire de singularités de contraintes dans la solution élastique. Ainsi, le champ de contrainte de la réponse élastique est régulier et borné, mais non-uniforme. Considérant une structure symétrique soumise à un chargement croissant monotone et adoptant la loi cohésive de type Dugdale (ou Barenblatt), une fissure cohésive apparaît au point matériel où la contrainte normale est maximale lorsque le chargement atteint la valeur critique. La question posée est l'étude de la nucléation et la propagation de fissure en soulignant les effets du gradient du champ de contrainte. L'évolution de la fissure contient deux phases, dont une de fissure purement cohésive suivie d'une autre de fissure partiellement non-cohésive. Dans la première phase, la fissure cohésive se propage progressivement et la longueur de fissure est une fonction continue régulière du paramètre de chargement. L'évolution de la fissure cohésive est contrôlée par la dérivée au second ordre du champ de contrainte. Dans la deuxième phase, lorsque le chargement atteint la valeur critique telle que l'ouverture de la fissure au centre de fissure atteigne δ_c , une partie non-cohésive est présente au centre de la fissure et la dernière se propage brutalement, *i.e.* la longueur de fissure devrait sauter à une valeur liée à la longueur caractéristique du gradient de contrainte. Après le saut de la longueur de fissure, la partie cohésive devient négligeable. On peut également utiliser ces résultats afin d'étudier les effets des défauts pré-existants au sein de la structure sur l'évolution de fissure. Le principal objectif du chapitre est d'obtenir des résultats sous la forme analytique dans le cas de la fissure de type Dugdale et de formuler la méthode semi-analytique dans le cas de la fissure de type Barenblatt en utilisant la technique à deux échelles et l'analyse complexe.

2.2 Description du problème et hypothèses

2.2.1 La structure, son comportement élastique et le chargement

L'analyse est réalisée dans le cadre de déformation plane. Le système cartésien (x_1, x_2, x_3) avec sa base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sont utilisés. La configuration de référence de la structure est un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 dans le plan (x_1, x_2) . Le matériau est fragile isotrope dont le comportement élastique est caractérisé par ses coefficients de Lamé λ et μ (ou de manière équivalente son module Young E et son coefficient de Poisson ν). Ce matériau adopte la loi de zone cohésive de type Dugdale (ou de type Barenblatt par la suite). La structure est soumise à un chargement

croissant monotonement qui est proportionnel à un paramètre $t > 0$ appelé le temps. Ainsi, lorsque la solution est purement élastique et la fissure est absente, le champ de déplacement $\mathbf{u}^{\text{el}}(t)$ et le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}(t)$ au temps t sont les solutions du système linéaire suivant

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}(t) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}(t) = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\text{el}}(t))) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\text{el}}(t)) & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}(t) \mathbf{n} = t\mathbf{F} & \text{sur } \partial_N \Omega \\ \mathbf{u}^{\text{el}}(t) = t\mathbf{U} & \text{sur } \partial_D \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans (2.1), $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\text{el}}(t))$ signifie le champ de déformation associé au champ de déplacement $\mathbf{u}^{\text{el}}(t)$, *i.e.* le gradient symétrique de $\mathbf{u}^{\text{el}}(t)$. La force volumique est négligée, $\partial_D \Omega$ représente la partie de la borne du domaine soumise au déplacement imposé, tandis que $\partial_N \Omega$ représente la partie de la borne du domaine soumise à la force imposée. Le chargement est croissant monotonement de manière que l'intensité de la force imposée et l'amplitude du déplacement imposé sont proportionnelles au paramètre de chargement t .

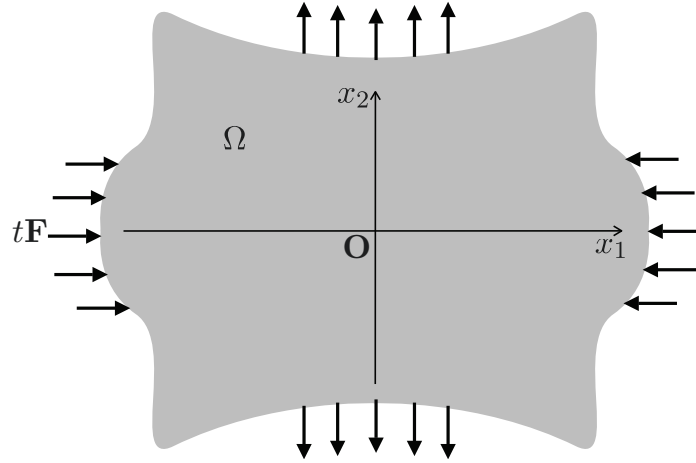


FIGURE 2.1 – La structure et le chargement appliqué

Puisque le problème (2.1) est linéaire, ses solutions dépendent linéairement du temps t et on peut écrire

$$\mathbf{u}^{\text{el}}(t) = t\mathbf{u}^{\text{el}}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}(t) = t\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} \quad (2.2)$$

où $(\mathbf{u}^{\text{el}}, \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}})$ sont solutions du problème élastique linéaire de chargement unitaire suivant

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\text{el}})) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\text{el}}) & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial_N \Omega \\ \mathbf{u}^{\text{el}} = \mathbf{U} & \text{sur } \partial_D \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2.2 Symétrie et hypothèses de régularité

Supposons que la structure est symétrique par rapport aux deux axes $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. En plus, le chargement l'est également et la réponse élastique admet les propriétés suivantes

1. La composante de cisaillement σ_{12}^{el} de contrainte s'annule sur les deux axes $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. En conséquence, le tenseur de contrainte est diagonal dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ à tous les points du domaine et ses valeurs propres sont dénotées respectivement par σ_1^{el} et σ_2^{el} .
2. Le champ de contrainte élastique $\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}(\mathbf{x})$ est une fonction régulière de \mathbf{x} . Sa composante normale $\sigma_{nn}^{\text{el}}(\mathbf{x})$ atteint sa valeur maximale positive à l'origine $\mathbf{O} = (0, 0)$ dans la direction $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$.

Ces hypothèses de symétrie et de régularité du problème induisent des propriétés importantes de répartition de contrainte le long de l'axe $x_2 = 0$. En particulier,

1. Le vecteur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}(x_1, 0)\mathbf{e}_2$ est purement normal et ainsi s'exprime comme suit

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}(x_1, 0)\mathbf{e}_2 = \Sigma(x_1)\mathbf{e}_2 \quad (2.4)$$

2. La distribution de contrainte normale $\Sigma(x_1)$ est une fonction paire régulière de x_1 qui atteint sa valeur maximale à $x_1 = 0$. Donc, en développant cette contrainte normale jusqu'au deuxième ordre (dans un premier temps) de x_1 autour de $x_1 = 0$, on obtient

$$\Sigma(x_1) = \sigma_2^{\text{el}}(0, 0) + \frac{1}{2}\sigma_{2,11}^{\text{el}}(0, 0)x_1^2 + o(x_1^2) \quad (2.5)$$

Dans cette formulation, la contrainte normale à l'origine $\sigma_2^{\text{el}}(0, 0)$ est positive et sa dérivée seconde $\sigma_{2,11}^{\text{el}}(0, 0)$ est négative.

3. On introduit la longueur caractéristique du gradient de contrainte

$$\ell := 2\sqrt{\frac{\sigma_2^{\text{el}}(0, 0)}{-\sigma_{2,11}^{\text{el}}(0, 0)}} \quad (2.6)$$

Le développement de la distribution de contrainte normale se réécrit comme suit

$$\Sigma(x_1) = \sigma_2^{\text{el}}(0, 0) \left(1 - \frac{2x_1^2}{\ell^2}\right) + o(x_1^2) \quad (2.7)$$

Le développement est une bonne approximation de $\Sigma(x_1)$ lorsque x_1 est très petit devant ℓ . On considérera à la section suivante une formulation plus générale de cette distribution en développant $\Sigma(x_1)$ jusqu'aux ordres supérieurs.

Remarque 7. Si on considère que le développement de $\Sigma(x_1)$ jusqu'au deuxième ordre est la vraie distribution de la contrainte normale, i.e. $\Sigma(x_1)$ s'exprime comme suit

$$\Sigma(x_1) = \sigma_2^{\text{el}}(0, 0) \left(1 - \frac{2x_1^2}{\ell^2}\right)$$

donc la contrainte normale est maximale à 0, positive (en traction) pour $|x_1| < \ell/\sqrt{2}$ et négative (en compression) pour $|x_1| > \ell/\sqrt{2}$. La présence de la zone de compression à une grande distance de l'origine limite la propagation de la fissure. On discutera cette limite à la fin de ce chapitre.

2.2.3 La loi cohésive de type Dugdale

La nucléation et la propagation des fissures dans la structure sont gérées par la loi cohésive de type Dugdale. On rappelle des ingrédients principaux de la loi. Dans cette dernière, la densité d'énergie surfacique de fissure dépend de manière non-triviale du saut de déplacement, tandis que le modèle de Griffith suppose que cette quantité est constante. Concrètement, en supposant que la fissure est toujours en mode I, *i.e.* seulement le déplacement normal est discontinu, la densité d'énergie surfacique s'écrit comme suit

$$\Phi(\llbracket u_n \rrbracket) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket < 0 \\ G_c \llbracket u_n \rrbracket / \delta_c & \text{si } 0 \leq \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c \\ G_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans (2.8), $\llbracket u_n \rrbracket$ signifie le saut de déplacement normal, G_c est la valeur critique du taux de restitution d'énergie du modèle de Griffith, tandis que δ_c est le saut de déplacement critique de la loi cohésive. Le rapport G_c/δ_c est la contrainte critique cohésive

$$\sigma_c = \frac{G_c}{\delta_c} \quad (2.9)$$

Pour la force cohésive, la contrainte normale σ_{nn} correspondant à l'interaction entre les lèvres de fissure est égale à σ_c lorsque $0 < \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c$ et s'annule dès que $\llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c$

$$\sigma_{nn} = \begin{cases} \leq \sigma_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket = 0 \\ = \sigma_c & \text{si } 0 < \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c \\ = 0 & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket > \delta_c \end{cases} \quad (2.10)$$

La densité d'énergie surfacique et la contrainte cohésive dans le modèle cohésif de Dugdale sont visualisées dans la figure 2.2. Donc, la fissure contient en général deux zones : *zone cohésive* dans laquelle la contrainte cohésive est égale à σ_c et *zone non-cohésive* dans laquelle la contrainte cohésive s'annule.

Remarque 8. *Le fait que σ_c joue le rôle de la contrainte critique à la rupture du matériau peut être vérifié dans le problème d'une barre unidimensionnelle sous traction simple, voir [Del Piero, 1999; Charlotte et al., 2000; Bourdin et al., 2008]. En effet, en utilisant le principe de minimisation d'énergie, on peut démontrer que la solution élastique n'est plus un minimum local de l'énergie totale de la barre dès que la contrainte dans la barre atteint la valeur critique σ_c . Dans le cas général tridimensionnel présenté dans [Charlotte et al., 2006], σ_c devient la contrainte critique d'un critère d'initiation de fissure cohésive de traction maximale. La présence d'une contrainte critique est cohérente avec la réalité d'ingénieur, dont une structure donnée n'est supportée à qu'un chargement d'amplitude limitée.*

Remarque 9. δ_c caractérise l'ouverture critique de la fissure cohésive au delà de laquelle la contrainte cohésive s'annule dans le modèle de Dugdale. Cette grandeur est évidemment une longueur caractéristique du matériau. Par ailleurs, on introduit une autre longueur caractéristique

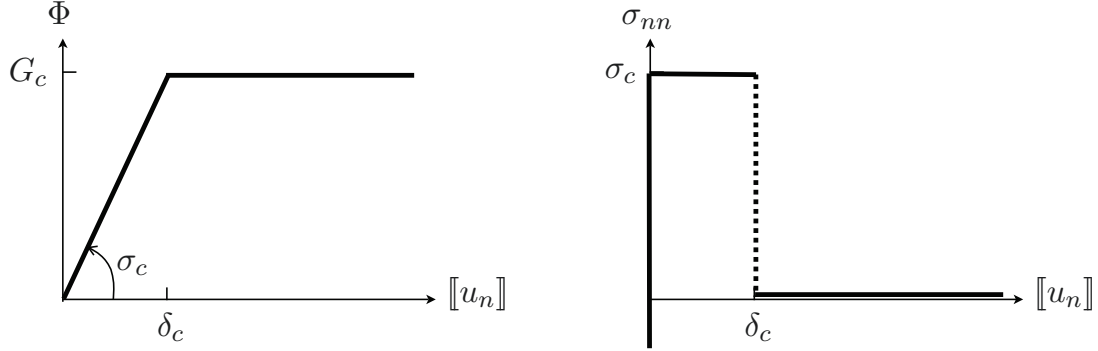


FIGURE 2.2 – Densité d'énergie surfacique et contrainte cohésive dans le modèle cohésif de Dugdale

du matériau dans le cadre des calculs en déformation plane qui inclut également les paramètres du comportement élastique

$$d_c = \frac{\pi}{8(1-\nu^2)} \frac{E}{\sigma_c} \delta_c \quad (2.11)$$

Cette longueur nous donne l'ordre de grandeur de la taille de la zone cohésive. En pratique, le module Young E est beaucoup plus grand que la contrainte critique σ_c , donc d_c est beaucoup plus grand que δ_c .

2.2.4 Formulations de l'approche variationnelle de l'évolution de fissure

Les hypothèses de symétrie et de régularité nous permettent de supposer que la fissure cohésive s'initie au point $\mathbf{O} = (0, 0)$ à l'instant critique t_e lorsque la contrainte normale maximale du problème élastique atteint la valeur critique σ_c

$$t_e = \frac{\sigma_c}{\sigma_2^{\text{el}}(0, 0)} \quad (2.12)$$

En injectant (2.12) dans (2.7), la distribution de la contrainte normale devient

$$\Sigma(x_1) = \sigma_c \frac{t}{t_e} \left(1 - \frac{2x_1^2}{\ell^2} \right) + o(x_1^2) \quad (2.13)$$

Après l'instant critique t_e , la fissure est supposée toujours droite et se situe sur l'axe $x_2 = 0$. En conséquence, la fissure à l'instant t , définie comme l'ensemble des points de discontinuité du champ de déplacement $\mathbf{u}(t)$ et dénotée par $S_{\mathbf{u}(t)}$, est un sous-ensemble de la partie Γ de l'axe $x_2 = 0$ incluse dans Ω

$$S_{\mathbf{u}(t)} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \llbracket \mathbf{u}(t) \rrbracket(\mathbf{x}) \neq 0\} \subset \Gamma = \Omega \cap \{x_2 = 0\}$$

En plus, suite à la symétrie du problème, le saut de déplacement à travers la ligne de discontinuité est purement normal. Donc la fissure est toujours en mode I et le saut normal $\llbracket u_2(t) \rrbracket(x_1)$ du déplacement à $(x_1, 0) \in S_{\mathbf{u}(t)}$ s'appelle l'ouverture de fissure à x_1 .

Avec ces hypothèses concernant le chemin de fissure, le problème d'évolution de la fissure pour le but d'identifier l'état de fissure et le champ de déplacement à l'instant t peut être formulé en utilisant l'approche variationnelle, voir [Ferdjani et al., 2007; Ferdjani et al., 2009; Bourdin et al., 2008]. Notons $\mathcal{U}_{ad}(t)$ l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissible, *i.e.* l'ensemble des champs vectoriels réguliers satisfaisant les conditions aux limites cinématiques qui admettent le saut à travers Γ seulement et le saut normal est non-négatif

$$\mathcal{U}_{ad}(t) = \{\mathbf{u}^* \in H^1(\Omega \setminus \Gamma; \mathbb{R}^2) : \mathbf{u}^* = t\mathbf{U} \text{ sur } \partial_D\Omega, \llbracket u_2^* \rrbracket \geq 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (2.14)$$

où H^1 désigne l'espace vectoriel de Sobolev associé à la norme naturelle $\|\cdot\|_1$. Pour un temps t donné, chaque vecteur $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}(t)$ associe à l'énergie totale de la structure $\mathcal{E}_t(\mathbf{u}^*)$ comme une somme de l'énergie élastique, l'énergie surfacique de fissure et le potentiel des efforts extérieurs

$$\mathcal{E}_t(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{u}^*}} \left(\frac{\lambda}{2} (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*))^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \right) d\mathbf{x} + \int_{S_{\mathbf{u}^*}} \Phi(\llbracket u_2^* \rrbracket) dx_1 - \int_{\partial_N\Omega} t\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* dS. \quad (2.15)$$

On présente maintenant les éléments les plus importants de l'approche variationnelle pour l'évolution de fissure. Une définition du problème variationnel sous la forme d'une minimisation locale est introduite, ensuite on considère la condition de stabilité locale d'ordre 1 et déduit des propriétés du champ de contrainte.

Définition 5 (Formulation variationnelle de l'évolution de fissure). *A chaque temps t , le champ de déplacement $\mathbf{u}(t)$, parmi l'ensemble des champ de déplacement cinématiquement admissible $\mathcal{U}_{ad}(t)$, minimise **localement** l'énergie totale de la structure \mathcal{E}_t . De manière formelle, $\mathbf{u}(t)$ satisfait les deux conditions suivantes*

1. $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}_{ad}(t)$;
2. $\exists h(t) > 0$ tel que $\mathcal{E}_t(\mathbf{u}(t)) \leq \mathcal{E}_t(\mathbf{u}^*)$, $\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}(t)$ tel que $\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}(t)\|_1 \leq h(t)$.

Le champ de contrainte à l'instant t se calcule grâce à la relation linéaire du comportement élastique $\boldsymbol{\sigma}(t) = \lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))\mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))$ et la fissure correspond à l'ensemble des points de discontinuité $S_{\mathbf{u}(t)}$ du champ de déplacement $\mathbf{u}(t)$.

Remarque 10 (Avantages de la formulation variationnelle). *La formulation variationnelle appliquée au problème d'évolution de fissure présente des avantages importants par rapport aux autres formulations basées sur les équations d'équilibre et les conditions standards, en particulier*

1. *Le problème est formulé sous une forme compacte qui est toujours valable malgré des changements de comportement, de chargement ou de géométrie*
2. *Les concepts d'équilibre et de stabilité se réunissent dans une formulation unique. En effet, on peut démontrer que les formulations classiques basées sur les équations d'équilibre et les conditions standards sont simplement la condition de stabilité locale d'ordre 1 (voir Proposition 1)*
3. *La formulation variationnelle peut être implémentée naturellement dans les codes d'élément fini en utilisant la méthode du Lagrangien augmenté (voir [Lorentz, 2008]).*

Remarque 11 (Absence des conditions d'irréversibilité). *Lors de l'introduction du modèle de Dugdale et la résolution du problème d'évolution de fissure, les conditions explicites d'irréversibilité sont absentes. Cette absence simplifie la présentation du problème mais peut être considérée comme une faiblesse de la formulation, du fait qu'elle peut conduire aux solutions non-physiques. Des détails de la formulation complète prenant en compte le principe d'irréversibilité sont présentés dans les travaux de [Jaubert et Marigo, 2006; Bourdin et al., 2008; Abdelmoula et al., 2010] concernant le problème de propagation de fissure fatigue.*

On présente dans la Proposition suivante les conditions locales auxquelles $\mathbf{u}(t)$ et $\boldsymbol{\sigma}(t)$, tant que les solutions du problème variationnel de Définition 5, devraient satisfaire.

Proposition 4 (Condition de stabilité locale d'ordre 1). *Le champ de déplacement $\mathbf{u}(t)$ et le champ de contrainte associé $\boldsymbol{\sigma}(t)$ sont solutions du problème de Définition 5 seulement s'ils satisfont aux conditions locales suivantes*

- Équations d'équilibre :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \setminus S_{\mathbf{u}(t)}$$

- Conditions aux limites :

$$\mathbf{u}(t) = t\mathbf{U} \text{ sur } \partial_D \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n} = t\mathbf{F} \text{ sur } \partial_N \Omega$$

- Chemin de fissure :

$$\begin{cases} \llbracket u(t)_2 \rrbracket = 0, \sigma(t)_{12} = 0, \sigma(t)_{22} \leq \sigma_c := \Phi'(0+) & \text{sur } \Gamma \setminus S_{\mathbf{u}(t)} \\ \llbracket u(t)_2 \rrbracket \geq 0, \sigma(t)_{12} = 0, \sigma(t)_{22} = \Phi'(\llbracket u(t)_2 \rrbracket) & \text{sur } S_{\mathbf{u}(t)} \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration est réalisée pour le cas général, pas seulement dans le cas du modèle de Dugdale, en mettant en place la densité d'énergie surfacique générale dans la formulation variationnelle. Considérons des champs de déplacement cinématique admissible $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(t) + h\mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}(t)$ pour $h > 0$ suffisamment petit. En injectant \mathbf{u}^* dans la condition de stabilité présentée dans la Définition 5, on obtient $\mathcal{E}_t(\mathbf{u}(t) + h\mathbf{v}) - \mathcal{E}_t(\mathbf{u}(t)) \geq 0$. En divisant par h et passant la limite lorsque $h \rightarrow 0$, cela induit que

$$\int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{u}^*}} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{S_{\mathbf{u}^*}} \Phi'(\llbracket u(t)_2 \rrbracket) \llbracket v_2 \rrbracket \, dx_1 - \int_{\partial_N \Omega} t\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dS \geq 0. \quad (2.16)$$

Considérons les types différents des champs \mathbf{v}

1. Choisissons des champs réguliers \mathbf{v} tels que $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket = 0$ sur Γ et $\mathbf{v} = 0$ sur $\partial_D \Omega$. On en déduit que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \setminus S_{\mathbf{u}(t)} \\ \boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n} = t\mathbf{F} & \text{sur } \partial_N \Omega \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}(t) \rrbracket \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} & \text{sur } S_{\mathbf{u}(t)} \end{cases} \quad (2.17)$$

En intégrant par parties la première intégrale de (2.16) et injectant (2.17), on obtient l'inégalité suivante

$$\int_{S_{\mathbf{u}^*}} \left(\Phi'(\llbracket u(t)_2 \rrbracket) - \sigma(t)_{22} \right) \llbracket v_2 \rrbracket \, dx_1 - \int_{S_{\mathbf{u}^*}} \sigma(t)_{12} \llbracket v_1 \rrbracket \, dx_1 \geq 0 \quad (2.18)$$

qui devrait être valable pour tous les champs \mathbf{v} admissibles.

2. Du fait que $\llbracket v_1 \rrbracket$ peut être choisi arbitrairement sur Γ , on en déduit que $\sigma(t)_{12} = 0$ sur Γ . Sachant que $S_{\mathbf{u}^*} = S_{\mathbf{u}(t)} \cup (S_{\mathbf{v}} \setminus S_{\mathbf{u}(t)})$, (2.18) devient

$$\int_{S_{\mathbf{u}(t)}} \left(\Phi'(\llbracket u(t)_2 \rrbracket) - \sigma(t)_{22} \right) \llbracket v_2 \rrbracket dx_1 + \int_{S_{\mathbf{v}} \setminus S_{\mathbf{u}(t)}} \left(\sigma_c - \sigma(t)_{22} \right) \llbracket v_2 \rrbracket dx_1 \geq 0, \quad (2.19)$$

où $\sigma_c := \Phi'(0+)$. D'ailleurs, parce que $\llbracket v_2 \rrbracket$ peut être choisi arbitrairement sur $S_{\mathbf{u}(t)}$ tandis que $\llbracket v_2 \rrbracket$ devrait être non-négatif sur $S_{\mathbf{v}} \setminus S_{\mathbf{u}(t)}$, on obtient les conditions suivantes sur la composante normale du champ de contrainte

$$\begin{cases} \sigma(t)_{22} \leq \sigma_c & \text{sur } \Gamma \setminus S_{\mathbf{u}(t)} \\ \sigma(t)_{22} = \Phi'(\llbracket u(t)_2 \rrbracket) & \text{sur } S_{\mathbf{u}(t)} \end{cases} \quad (2.20)$$

La démonstration est ainsi complète. \square

Remarque 12. *Soulignons les résultats les plus importants de Proposition 4*

- *L'équation d'équilibre, les conditions aux limites et de chemin de fissure sont seulement les conditions **nécessaires** pour que $\mathbf{u}(t)$ soit stable dans le sens de Définition 5. En général, elles ne sont pas suffisantes et on devrait étudier la **condition de stabilité locale d'ordre 2**. Cette condition nous permet de considérer la stabilité et également l'unicité de la solution. Néanmoins, dans l'étude de ce chapitre, on ne rentre pas dans les détails de cette condition.*
- *La condition de chemin de fissure contient non seulement le fait que la contrainte cohésive sur les lèvres de fissure est donnée par la dérivée de la densité d'énergie surfacique $\sigma(t)_{22} = \Phi'(\llbracket u(t)_2 \rrbracket)$, mais également le critère en contrainte d'initiation de fissure $\sigma(t)_2 \leq \sigma_c = \Phi'(0+)$. En conséquence, le champ de contrainte est nécessairement borné et la singularité de contrainte n'est pas autorisée dans le modèle cohésif.*

2.3 Résolution du problème d'évolution de fissure

2.3.1 Réduction du problème avec les hypothèses de symétrie

Le problème d'évolution de fissure introduit précédemment sous la forme générale peut être réduit grâce aux hypothèses de symétrie présentées dans la section 2.2. Néanmoins, il faudrait noter que l'unicité de la solution n'est pas assurée, donc la recherche d'une solution respectant les hypothèses de symétrie requiert certaines hypothèses supplémentaires concernant la symétrie de fissure et la monotonie de l'ouverture de fissure.

Hypothèse 1 (Fissure centrée). *A chaque instant t , soit l'ensemble des points de discontinuité $S_{\mathbf{u}(t)}$ du champ de déplacement $\mathbf{u}(t)$ est vide, soit il est centré à $\mathbf{O} = (0, 0)$, i.e. il existe une longueur $a(t)$ telle que $S_{\mathbf{u}(t)} = (-a(t), a(t)) \times \{0\}$.*

Hypothèse 2 (Symétrie et monotonie de $\llbracket u(t)_2 \rrbracket$). *Lorsque $S_{\mathbf{u}(t)}$ est non vide, l'ouverture de fissure $\llbracket u(t)_2 \rrbracket$ est une fonction continue de x_1 , maximale à $x_1 = 0$ et décroissante à 0 lorsque $|x_1|$ tend vers $a(t)$.*

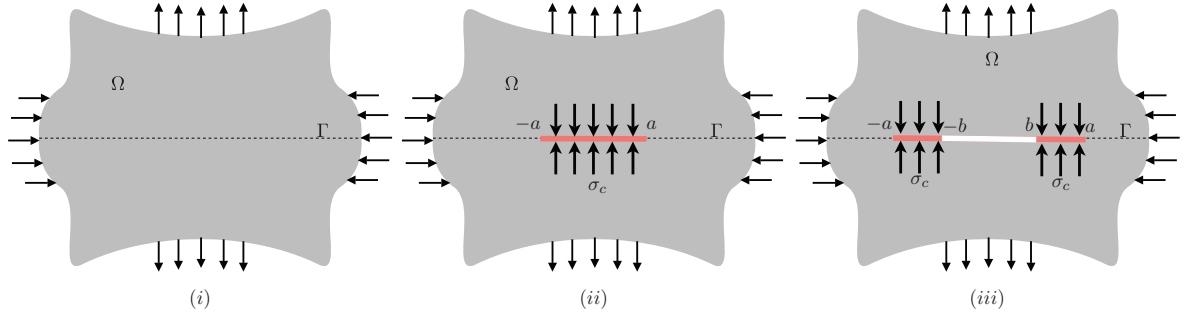


FIGURE 2.3 – Trois types possibles de l'état de fissure : (i) sans fissure, (ii) fissure purement cohésive, (iii) fissure partiellement non-cohésive

Grâce aux hypothèses, l'ensemble des états de la fissure à l'instant t est limité. Concrètement, on considère dans ce chapitre chacun des cas suivants visualisés dans Figure 2.3

- (i) La fissure est absente dans la structure, *i.e.* $a(t) = 0$ et $S_{\mathbf{u}(t)} = \emptyset$. La réponse de la structure est purement élastique, donc l'ensemble des états de fissure de ce type satisfaisant à la condition de stabilité locale d'ordre 1 s'appelle la *branche élastique*.
- (ii) Il existe une fissure au sein de la structure dont l'ouverture à $x_1 = 0$ est inférieure à la valeur critique δ_c du modèle cohésif de Dugdale, *i.e.* $a(t) > 0$ et $\llbracket u(t)_2 \rrbracket(0) \leq \delta_c$. Dans ce cas, toute la lèvres de la fissure est soumise à la contrainte cohésive σ_c . L'ensemble des états de fissure de ce type satisfaisant à la condition de stabilité locale d'ordre 1 s'appelle la *branche purement cohésive*.
- (iii) Il existe une fissure au sein de la structure dont l'ouverture à $x_1 = 0$ est supérieure à δ_c , *i.e.* $a(t) > 0$ et $\llbracket u(t)_2 \rrbracket(0) > \delta_c$. Dans ce cas, du fait que l'ouverture de fissure est une fonction monotone de $|x_1|$ et décroissante à 0, il existe deux points symétriques $(\pm b(t), 0)$ pour $0 < b(t) < a(t)$ auxquels $\llbracket u(t)_2 \rrbracket(\pm b(t)) = \delta_c$. Ainsi, la fissure se divise en deux parties
 - la *zone cohésive* où la contrainte cohésive est égale à la contrainte critique cohésive de Dugdale σ_c
 - la *zone non-cohésive* où la contrainte cohésive s'annule

On décrit ce cas sous une forme plus synthétique suivante

$$\begin{cases} \text{si } |x_1| < b(t) & : \llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1) > \delta_c, \quad \sigma(t)_{22}(x_1, 0) = 0 \\ \text{si } b(t) < |x_1| < a(t) & : 0 < \llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1) < \delta_c, \quad \sigma(t)_{22}(x_1, 0) = \sigma_c \end{cases}.$$

L'ensemble des états de fissure de ce type satisfaisant à la condition de stabilité locale d'ordre 1 s'appelle la *branche partiellement non-cohésive*

L'évolution des pointes de la zone cohésive $a(t)$ et de la zone non-cohésive $b(t)$ est à identifier lors de notre étude. La condition de non-singularité du champ de contrainte et la minimisation locale d'énergie permettent de démontrer les Propositions suivantes concernant les propriétés importantes de $a(t)$ et $b(t)$.

Proposition 5 (Facteur d'intensité de contrainte en pointes de la zone cohésive). *Du fait que la contrainte normale $\sigma(t)_{22}$ devrait être bornée partout sur Γ , la singularité n'est pas autorisée en pointes de la zone cohésive $(\pm a(t), 0)$ et le facteur d'intensité de contrainte en mode I devrait s'annuler à $x_1 = \pm a(t)$.*

Démonstration. Considérons les cas dans lesquels la fissure est présente au sein de la structure, *i.e.* $a(t) > 0$. Dans le voisinage des pointes de la fissure cohésive $(\pm a(t), 0)$, le champ de déplacement $\mathbf{u}(t)$ et le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(t)$ devraient satisfaire à la relation linéaire du comportement élastique et la condition aux limites $\boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{e}_2 = \sigma_c\mathbf{e}_2$ sur les lèvres de la fissure (à côté de la pointe). En conséquence, on retrouve la situation d'une fissure au sein d'un milieu élastique linéaire isotrope soumis aux conditions aux limites de type Neumann. La solution du problème est détaillée dans [Bui, 1978; Grisvard, 1985]. Cette solution contient *a priori* une singularité. En effet, en prenant en compte les hypothèses de symétrie et supposant que la fissure est toujours en mode I, le champ de déplacement $\mathbf{u}(t)$ dans un voisinage de la pointe de fissure $(a(t), 0)$ s'exprime comme suit

$$\mathbf{u}(t)(\mathbf{x}) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (3 - 4\nu - \cos\theta) \left(\cos\frac{\theta}{2} \mathbf{e}_1 + \sin\frac{\theta}{2} \mathbf{e}_2 \right) + \text{termes réguliers}$$

où (r, θ) désignent les coordonnées sphériques de \mathbf{x} , *i.e.* $\mathbf{x} = r \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2$. Ainsi, le saut normal de déplacement sur les lèvres de la fissure à côté de la pointe $(a(t), 0)$ est donné par

$$[[u(t)_2]](x_1) = 8(1 - \nu^2) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{a(t) - x_1}{2\pi}} + \text{termes réguliers}$$

Puisque le saut normal devrait être positif $[[u(t)_2]](x_1) \geq 0$, le facteur d'intensité de contrainte l'est également $K_I \geq 0$. Par ailleurs, la contrainte normale $\sigma(t)_{22}$ sur l'axe $\theta = 0$ à côté de la pointe $(a(t), 0)$ s'écrit comme suit

$$\sigma(t)_{22}(x_1) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x_1 - a(t))}} + \text{regular terms}$$

Du fait que $\sigma(t)_{22}(x_1)$ devrait être inférieure que la contrainte critique σ_c , le facteur d'intensité de contrainte devrait être non-positif $K_I \leq 0$. En conséquence, $K_I = 0$ \square

Proposition 6 (Ouverture de fissure en pointe de la zone non-cohésive). *La position $b(t)$ de la pointe de la zone non-cohésive, lorsqu'il existe, devrait satisfaire à la condition suivante concernant l'ouverture de la fissure*

$$[[u(t)_2]](\pm b(t)) = \delta_c \quad (2.21)$$

Démonstration. On démontre cette Proposition en utilisant la formulation variationnelle. Notons (a^*, b^*) respectivement les positions arbitraires admissibles des pointes de la zones cohésive et non-cohésive de la fissure, ainsi

$$0 < b^* < a^*, \quad (a^*, 0) \in \Gamma, \quad (b^*, 0) \in \Gamma$$

2.3. Résolution du problème d'évolution de fissure

Considérons un champ de déplacement cinématique admissible correspondant $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}(t)$. La zone cohésive et la zone non-cohésive de la fissure sont ainsi dénotées par

$$\Gamma_c^* := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid 0 < \llbracket u^* \rrbracket(x_1) < \delta_c\} = (-a^*, -b^*) \cup (b^*, a^*) \times \{0\},$$

$$\Gamma_{nc}^* := S_{\mathbf{u}^*} \setminus \Gamma_c = (-b^*, b^*) \times \{0\}$$

Sachant que la contrainte cohésive est égale à σ_c sur la zone cohésive et s'annule sur la zone non-cohésive, on réécrit l'énergie totale du système (2.15) comme une fonction du champ de déplacement \mathbf{u}^* et les deux longueurs (a^*, b^*)

$$\mathcal{E}_t(\mathbf{u}^*, a^*, b^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus S_{\mathbf{u}^*}} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_c^*} \sigma_c \llbracket u_2^* \rrbracket dx_1 + \int_{\Gamma_{nc}^*} G_c dx_1 - \int_{\partial_N \Omega} t \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* dS \quad (2.22)$$

Dans cette expression, \mathbf{A} signifie le tenseur de rigidité du matériau et G_c représente la valeur critique du taux de restitution d'énergie de Griffith. La formulation de minimisation locale d'énergie s'exprime sous la forme suivante

$$\begin{aligned} & \exists h(t) > 0, \forall (a^*, b^*, \mathbf{u}^*) \text{ tels que} \\ & \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}(t), 0 < b^* < a^*, \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}(t)\|_1 \leq h(t), |a^* - a(t)| + |b(t) - b^*| \leq h(t) \\ & \mathcal{E}_t(\mathbf{u}(t), a(t), b(t)) \leq \mathcal{E}_t(\mathbf{u}^*, a^*, b^*) \end{aligned} \quad (2.23)$$

On choisit $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(t)$, $a^* = a(t)$ et $b^* = b(t) + h\beta$ pour $h > 0$ suffisamment petit. En injectant ces grandeurs dans (2.23), la condition de stabilité devient $\mathcal{E}_t(\mathbf{u}(t), a(t), b(t) + h\beta) - \mathcal{E}_t(\mathbf{u}(t), a(t), b(t)) \geq 0$. En divisant cette inégalité par h et tend h vers 0, cela déduit que

$$-2\sigma_c \llbracket u(t)_2 \rrbracket(b(t))\beta + 2G_c\beta \geq 0$$

Du fait que β peut être choisi arbitrairement, cette inégalité nous donne la condition suivante du saut normal de déplacement en pointes de la zone non-cohésive

$$\llbracket u(t)_2 \rrbracket(\pm b(t)) = \frac{G_c}{\sigma_c} = \delta_c$$

La Proposition est donc démontrée. \square

2.3.2 Calculs analytiques avec l'approche à deux échelles

On arrive maintenant à la construction de la solution analytique de l'évolution de la fissure en supposant que la longueur caractéristique du matériau définie dans (2.11) est beaucoup plus petite que la dimension L de la structure. En plus, on suppose que la longueur ℓ qui caractérise le gradient du champ de contrainte est de même ordre ou beaucoup plus petite que L

$$d_c \ll L, \quad \ell \lesssim L$$

La hiérarchie des longueurs permet d'utiliser la technique à deux échelles afin de construire la solution analytique (approximative). La résolution du problème suit la procédure d'évolution de fissure.

2.3.2.1 Détermination de la branche élastique

On résout le problème élastique (2.3) et détermine le champ de déplacement \mathbf{u}^{el} et le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}$. On en déduit la distribution de la contrainte normale $\sigma_{22}^{\text{el}}(x_1)$ le long de Γ . L'équation (2.12) nous permet de calculer le temps t_e correspondant à la limite de validité de la réponse élastique. Le champ de déplacement de la solution élastique correspondant à $0 < t < t_e$ est donné simplement par $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{u}^{\text{el}}$. Au delà du chargement t_e , la fissure est présente dans la structure.

2.3.2.2 Détermination de la branche purement cohésive

Considérons une fissure purement cohésive de longueur $2a > 0$ à l'instant $t > 0$. Pour a et t donnés, on définit les champs associés de déplacement et de contrainte comme la solution *unique*, dénotée par $(\mathbf{u}[t, a], \boldsymbol{\sigma}[t, a])$, du problème élastique linéaire posé sur la structure fissurée soumise à la contrainte cohésive *uniforme* sur les lèvres de la fissure

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \boldsymbol{\sigma}[t, a] = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a] = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}[t, a]))\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}[t, a]) & \text{dans } \Omega \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \mathbf{u}[t, a] = t\mathbf{U} & \text{sur } \partial_D\Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a]\mathbf{n} = t\mathbf{F} & \text{sur } \partial_N\Omega \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a]\mathbf{e}_2 = \sigma_c\mathbf{e}_2 & \text{sur } [-a, a] \times \{0\} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Ce problème, et sa solution également, admettent les mêmes hypothèses de symétrie que le problème élastique original. Dans ce cas, du fait que la longueur de la fissure est beaucoup plus petite que les dimensions du domaine, la fissure perturbe les champs élastique seulement dans un voisinage de l'origine \mathbf{O} . En conséquence, introduisons dans (2.24) les différences entre la solution avec la fissure purement cohésive et la solution élastique, *i.e.*

$$\bar{\mathbf{u}}[t, a] = \mathbf{u}[t, a] - t\mathbf{u}^{\text{el}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a] = \boldsymbol{\sigma}[t, a] - t\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}$$

La différence de champ de contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a](\mathbf{x})$ devrait tendre vers 0 lors que $\|\mathbf{x}\|$ devient grand devant a . Par ailleurs, sur les lèvres de la fissure, la différence de contrainte normale vérifie la condition $\bar{\sigma}[t, a]_{22}(x_1) = \sigma_c - t\Sigma(x_1)$ où $\Sigma(x_1)$ est donné par (2.13). En conséquence, on obtient

$$\bar{\sigma}[t, a]_{22}(x_1) = \left(1 - \frac{t}{t_e}\right) \sigma_c + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2} \sigma_c + o(x_1^2), \quad |x_1| < a$$

Lorsque $a \ll \ell$, le terme $o(x_1^2)$ est négligeable et donc on considère seulement les deux premiers termes du développement. Même dans le cas où a est à même ordre que ℓ , on peut considérer la distribution parabolique comme le cas le plus simple pour étudier l'influence du gradient de contrainte sur la nucléation de fissure. Une forme plus générale de cette distribution sera mise en place dans la section prochaine. En conséquence, cette simplification nous permet d'écrire le

2.3. Résolution du problème d'évolution de fissure

problème concernant les champs de différences $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}})$ dans un voisinage de l'origine comme suit

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a] = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a] = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a])) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a]) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a](\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0} & \text{lorsque } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a](x_1, 0) \mathbf{e}_2 = \left(1 - \frac{t}{t_e} + 2 \frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2}\right) \sigma_c \mathbf{e}_2 & \text{lorsque } x_1 \in (-a, a) \end{cases} \quad (2.25)$$

La construction du problème est ainsi basée sur une approximation et une hypothèse suivantes

1. Le problème est posé sur le plan \mathbb{R}^2 en respectant la condition que la contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ tend vers 0 à l'infini. Du fait que la longueur de la fissure a est beaucoup plus petite que L , on devrait retrouver la solution purement élastique loin de la fissure. En conséquence, le problème est traité dans l'échelle de a et considère la borne du domaine comme l'infini.
2. La répartition de la contrainte normale sur les lèvres de fissure est supposée quadratique. Cette hypothèse est un cas particulier du chargement ou une approximative valable lorsque $a \ll \ell$.

Grâce à la simplification, le système d'équations (2.25) peut être résolu analytiquement. En effet, le problème simplifié est un cas particulier de la famille des problèmes élastiques planes qui peuvent être traités avec la méthode des potentiels complexes développée par [Muskhelishvili, 1963]. Les procédures principales de cette méthode sont rappelées dans l'annexe 2.A du chapitre et on présente directement ici les résultats associés à la contrainte normale suivante

$$\mathbb{T}(x_1) = \left(1 - \frac{t}{t_e} + 2 \frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2}\right) \sigma_c \quad (2.26)$$

Le facteur d'intensité de contrainte en pointe de la fissure cohésive s'exprime comme suit grâce aux calculs d'intégrale (2.116) donnée dans l'annexe 2.A

$$\mathbb{K}_I[t, a] = \sigma_c \sqrt{\pi a} \left(\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2}\right) \frac{t}{t_e} - 1 \right)$$

La condition $\mathbb{K}_I[t, a] = 0$ nous donne l'évolution de la position de la pointe de la fissure cohésive en fonction du temps

$$a(t) = \ell \sqrt{1 - \frac{t_e}{t}} \quad (2.27)$$

Ainsi, la longueur de la fissure est proportionnelle à la longueur caractéristique ℓ du gradient de contrainte, égale à 0 à l'instant t_e et augmente monotonement en temps. Cette solution est valable pendant la phase où l'ouverture de la fissure à $x_1 = 0$ est encore inférieure à δ_c , et donc la composante normale de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est inférieure à σ_c le long de l'axe. L'ouverture de fissure et la contrainte normale sont obtenues grâce aux intégrales présentées dans l'annexe 2.A. D'abord, on peut calculer la dérivée du potentiel complexe défini dans l'annexe grâce à l'intégrale (2.114)

$$\varphi'(z) = \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) \left(\frac{2z^2}{a(t)^2} - 1 - \frac{2z}{a(t)} \sqrt{\frac{z^2}{a(t)^2} - 1} \right) \quad (2.28)$$

où la longueur $a(t)$ est donnée par (2.27). On obtient également l'expression de contrainte normale dans la zone non-fissurée $\Gamma \setminus [-a, a]$ en mettant place (2.26) dans (2.115)

$$\bar{\sigma}[t, a(t)]_{22}(x_1, 0) = \sigma_c \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) \left(\frac{2x_1^2}{a(t)^2} - 1 - \frac{2|x_1|}{a(t)} \sqrt{\frac{x_1^2}{a(t)^2} - 1} \right) \quad \text{si } |x_1| \geq a(t) \quad (2.29)$$

Donc, $\bar{\sigma}[t, a(t)]_{22}(x_1, 0)$ est une fonction monotone décroissante de $|x_1| \geq a(t)$ qui décroît de $\sigma_c(t/t_e - 1)$ en pointe de fissure à 0 lorsque $|x_1| \rightarrow \infty$. On peut vérifier facilement que la contrainte normale $\sigma(t)_{22}(x_1, 0)$ est plus petite que la contrainte critique σ_c pour toutes les valeurs de x_1 .

Remarque 13. *Les expressions au dessus sont valables à petite échelle en supposant que la longueur de la fissure $a(t)$ est très petite devant la dimensions L du domaine. Avec ces approximations, on peut déduire facilement que la contrainte normale $\sigma(t)_{22}(x_1, 0)$ est inférieure à σ_c à petite échelle, i.e. dans un voisinage de l'origine. Il est possible que le critère de traction maximale puisse être atteinte à d'autres points (loin de l'origine) à l'instant t . Dans tel cas, d'autres fissures s'initient à ces points. Néanmoins, dans la première phase de leurs évolutions, on suppose qu'il existe pas d'interaction entre les fissures, ainsi notre procédure de calculs reste valable.*

A partir de (2.28), on peut déterminer maintenant l'ouverture le long de la fissure cohésive. Notons $z^\pm = x_1 + i0$ les points sur les lèvres supérieure et inférieure de fissure à x_1 pour $|x_1| \leq a(t)$. A partir de (2.28), on obtient

$$\varphi'(z^\pm) = \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) \left(\frac{2x_1^2}{a(t)^2} - 1 \mp i \frac{2x_1}{a(t)} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a(t)^2}} \right)$$

Cela déduit le saut de la dérivée du potentiel complexe à travers la fissure

$$[\![\varphi]\!]'(x_1) = -2i\sigma_c \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) \frac{x_1 \sqrt{a(t)^2 - x_1^2}}{a(t)^2}$$

En utilisant la relation (2.117) entre $[\![\varphi]\!]$ et $[\![u(t)_2]\!]$ présentée dans l'annexe 2.A et la condition aux limites $[\![u_2]\!](\pm a) = 0$, on en déduit que $[\![\varphi]\!](\pm a(t)) = 0$. Par conséquent, les calculs d'intégrale nous donnent $[\![\varphi]\!](x_1)$. Cela nous permet de calculer le saut de déplacement normal au point x_1 comme suit

$$[\![u(t)_2]\!](x_1) = \frac{8}{3}(1 - \nu^2) \frac{\sigma_c}{E} a(t) \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) \left(1 - \frac{x_1^2}{a(t)^2} \right)^{3/2} \quad (2.30)$$

On remarque que l'ouverture de la fissure cohésive est une fonction paire de x_1 et maximale à l'origine qui justifie *à posteriori* Hypothèse 2. D'ailleurs, (2.27) peut être réécrite sous la forme suivante

$$a(t) = \ell \sqrt{\frac{t_e}{t}} \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right)$$

En injectant cette expression et remplaçant la longueur d_c donnée par (2.11) dans (2.30), l'ouverture de la fissure à l'origine $x_1 = 0$ s'écrit comme suit

$$[\![u(t)_2]\!](0) = \frac{\pi \ell}{3d_c} \delta_c \sqrt{\frac{t_e}{t}} \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right)^{3/2} \quad (2.31)$$

2.3. Résolution du problème d'évolution de fissure

Donc l'ouverture à $x_1 = 0$ est une fonction croissante du temps t pour $t \geq t_e$. Elle atteint la valeur critique δ_c au temps t_i donné par

$$\frac{t_e}{t_i} \left(\frac{t_i}{t_e} - 1 \right)^3 = \frac{9d_c^2}{\pi^2 \ell^2} \quad (2.32)$$

Ce temps t_i correspond à la fin de la *branche purement cohésive*. La mi-longueur de la fissure à l'instant t_i est dénotée par $a_i := a(t_i)$. Après cet instant, une zone non-cohésive apparaît au centre de la fissure. Dans le cas où d_c est beaucoup plus petit que ℓ , le temps t_i est calculé approximativement comme suit

$$\frac{t_i}{t_e} \approx 1 + \left(\frac{3d_c}{\pi \ell} \right)^{2/3} \quad (2.33)$$

et la mi-longueur de la fissure à cet instant est exprimée par

$$a_i \approx \left(\frac{3d_c}{\pi \ell} \right)^{1/3} \ell \quad (2.34)$$

Dénotons $\epsilon := d_c/\ell$ le rapport entre deux longueurs caractéristiques du problème. Par la hiérarchie des longueurs, on déduit que ϵ est de même ordre ou très petit devant l'unité, *i.e.* $\epsilon \lesssim 1$. Donc (2.34) induit les relations suivantes

$$\frac{a_i}{\ell} \sim \epsilon^{1/3}, \quad \frac{d_c}{a_i} \sim \epsilon^{2/3}$$

En conséquence, l'ordre de magnitude de a_i est entre d_c et ℓ

$$d_c \lesssim a_i \lesssim \ell \quad (2.35)$$

2.3.2.3 Détermination de la branche partiellement non-cohésive

On considère finalement le cas d'une fissure partiellement non-cohésive à l'instant t . La longueur de la zone non-cohésive est $2b$ et les pointes des zones cohésives se situent à $\pm a$. Correspondant à (t, a, b) donnés pour $0 < b < a$ et $t > 0$, on définit les champs de déplacement et de contrainte associés comme la solution *unique*, dénotée par $(\mathbf{u}[t, a, b], \boldsymbol{\sigma}[t, a, b])$, du problème élastique linéaire suivant posé sur la structure soumise à la contrainte non-uniforme sur les lèvres de fissure

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}[t, a, b] = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a, b] = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}[t, a, b])) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}[t, a, b]) & \text{dans } \Omega \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \mathbf{u}[t, a, b] = t\mathbf{U} & \text{sur } \partial_D \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a, b] \mathbf{n} = t\mathbf{F} & \text{sur } \partial_N \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a, b] \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} & \text{sur } (-b, b) \times \{0\} \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a, b] \mathbf{e}_2 = \sigma_c \mathbf{e}_2 & \text{sur } ((-a, -b) \cup (b, a)) \times \{0\} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Ce problème, et sa solution également, admettent les mêmes hypothèses de symétrie que le problème élastique original. Du fait que $0 < b < a \ll L$, la fissure perturbe les champs élastiques

seulement dans un voisinage de l'origine. En conséquence, on introduit dans le système d'équation (2.36) les différences entre la solution avec fissure partiellement non-cohésive et la solution élastique, *i.e.*

$$\bar{\mathbf{u}}[t, a, b] = \mathbf{u}[t, a, b] - t\mathbf{u}^{\text{el}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b] = \boldsymbol{\sigma}[t, a, b] - t\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}$$

En utilisant les mêmes approximations et hypothèses que dans le cas de fissure purement cohésive, le problème concernant les champs de différences dans un voisinage de l'origine s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b] = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b] = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a, b]))\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a, b]) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b](\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0} & \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b](x_1, 0)\mathbf{e}_2 = \mathbf{T}(x_1)\mathbf{e}_2 & \text{sur } (-a, a) \times \{0\} \end{cases} \quad (2.37)$$

où

$$\mathbf{T}(x_1) = \begin{cases} \left(-\frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2} \right) \sigma_c & \text{si } |x_1| < b \\ \left(1 - \frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2} \right) \sigma_c & \text{si } b < |x_1| < a \end{cases} \quad (2.38)$$

Le problème (2.37) peut être toujours résolu analytiquement parce qu'il est encore un cas particulier de la famille des problèmes élastiques planes présenté dans l'annexe 2.A. Correspondant à un triple (t, a, b) , la solution $\mathbf{u}[t, a, b]$ est unique à un déplacement du corps rigide près et le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}[t, a, b]$ est unique. Pour un temps $t > 0$ donné, la solution appartient à la branche partiellement non-cohésive seulement si a et b satisfont aux conditions concernant le facteur d'intensité de contrainte en pointe de la zone cohésive $K_I[t, a, b]$ et l'ouverture de fissure en pointe de la zone non-cohésive (voir Propositions 5-6)

$$\begin{cases} K_I[t, a, b] = 0 \\ \llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b) = \delta_c \end{cases} \quad (2.39)$$

En utilisant la distribution de contrainte normale (2.38), le facteur d'intensité de contrainte en pointe de la fissure cohésive s'exprime comme suit grâce aux calculs d'intégrale (2.116)

$$K_I[t, a, b] = \sigma_c \sqrt{\pi a} \left(\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) \frac{t}{t_e} - 1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{b}{a} \right) \quad (2.40)$$

La condition $K_I[t, a, b] = 0$ nous donne une première relation suivante entre a, b et t

$$\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) \frac{t}{t_e} = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{b}{a}. \quad (2.41)$$

Afin de calculer l'ouverture de la fissure en pointe de la zone non-cohésive $\llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b)$, il faudrait considérer le saut du potentiel complexe $\varphi(z)$ défini dans l'annexe 2.A à travers les zones cohésives, *i.e.* $\llbracket \varphi \rrbracket(x_1)$ pour $b < |x_1| < a$. En utilisant (2.38) et (2.41) et la méthode

2.3. Résolution du problème d'évolution de fissure

présentée dans l'annexe 2.A, on obtient l'expression de la dérivée du saut du potentiel complexe comme suit

$$\llbracket \varphi \rrbracket'(x_1) = -2i\sigma_c \left(\frac{x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2}}{\ell^2} \frac{t}{t_e} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctanh} \left(\frac{b \sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1 \sqrt{a^2 - b^2}} \right) \right). \quad (2.42)$$

En sachant que le saut de déplacement normal s'annule à $x_1 = a$ et utilisant la relation (2.117) donnée dans l'annexe 2.A, on en déduit que $\llbracket \varphi \rrbracket(a) = 0$. Donc l'intégrale de (2.42) nous donne

$$\llbracket \varphi \rrbracket(b) = 2i\sigma_c \left(\frac{1}{3} \frac{t}{t_e} \frac{(a^2 - b^2)^{3/2}}{\ell^2} + \frac{b}{\pi} \ln \frac{a}{b} \right)$$

En conséquence, le saut de déplacement normal à la pointe de la zone non cohésive $x_1 = b$ peut s'exprimer comme suit

$$\llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b) = 8(1 - \nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \left(\frac{1}{3} \frac{t}{t_e} \frac{(a^2 - b^2)^{3/2}}{\ell^2} + \frac{b}{\pi} \ln \frac{a}{b} \right). \quad (2.43)$$

Suite à la deuxième condition du système (2.39), on obtient la deuxième relation entre a, b et t

$$\frac{\pi}{3} \frac{t}{t_e} \frac{(a^2 - b^2)^{3/2}}{\ell^2} + b \ln \frac{a}{b} = d_c. \quad (2.44)$$

Remarque 14. On a capacité de démontrer que si (t, a, b) satisfont (2.41) et (2.44), les champs associés $\mathbf{u}[t, a, b]$ et $\boldsymbol{\sigma}[t, a, b]$ vérifient la condition de stabilité locale d'ordre 1 et ainsi le système suivant

$$\begin{cases} \llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1) > \delta_c & \text{si } |x_1| < b(t) \\ 0 < \llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1) < \delta_c & \text{si } b(t) < |x_1| < a(t) \\ \sigma(t)_{22}(x_1) \leq \sigma_c & \text{si } |x_1| \geq a(t) \end{cases} \quad (2.45)$$

La démonstration est basée sur l'étude du potentiel $\varphi(z)$ pour $z = x_1 + i0$, pour toutes les valeurs possibles de x_1 .

2.3.3 Représentation des trois branches

Dans cette sous section, on visualise les résultats trouvés précédemment et on aborde le problème d'évolution de la fissure partiellement non-cohésive en utilisant la méthode des courbes paramétrées.

(i) La *branche élastique* commence à $t = 0$ et s'arrête à $t = t_e$ donné par (2.12). Le long de cette branche, la fissure est absente $a(t) = 0$. En conséquence, la branche élastique correspond au segment $[0, t_e] \times \{0\}$ sur le diagramme (t, a) .

(ii) La *branche purement cohésive* commence à $t = t_e$ et s'arrête à $t = t_i$ donné par (2.33). Le long de cette branche, la longueur de la fissure cohésive $a(t)$ augmente progressivement en temps t de 0 à la valeur a_i donné approximativement par (2.34). L'évolution de a en fonction de

t s'exprime dans (2.27). Ainsi, la branche purement cohésive correspond à la courbe monotone présenté dans la figure 2.5 sur le diagramme (t, a) qui passe du point $(t_e, 0)$ au point (t_i, a_i) .

(iii) Pour la *branche partiellement non-cohésive*, les deux longueurs (a, b) et le temps t se lient par deux conditions (2.41) et (2.44). Afin d'étudier l'évolution des longueurs en temps, on introduit une variable sans dimension suivante

$$\alpha = \frac{b}{a} \in (0, 1)$$

En injectant cette grandeur et (2.41) dans (2.44), on obtient

$$\left(\frac{2}{3}(1 - \alpha^2)^{3/2} \arccos \alpha + \alpha \ln \alpha \right) \frac{a^3}{\ell^3} + \frac{d_c a^2}{\ell^3} - \alpha \ln \alpha \frac{a}{\ell} - \frac{d_c}{\ell} = 0. \quad (2.46)$$

Pour $\alpha \in (0, 1)$ donné, (2.46) est une équation de troisième ordre de la grandeur sans dimension $\bar{a} := a/\ell$ qui dépend du paramètre $\epsilon = d_c/\ell$. Cette équation admet une solution unique, dénotée par $\bar{a}^\epsilon(\alpha)$. Cette solution dépend de α de manière non-monotone. En effet, $\bar{a}^\epsilon(\alpha)$ commence à $a_i/\ell = \sqrt{1 - t_e/t_i}$ correspondant à $\alpha = 0$, puis décroît jusqu'à a_m/ℓ avant de croître et finalement tend vers 1 lorsque α tend vers 1, voir la figure 2.4. Par ailleurs, (2.41) permet d'écrire t/t_e en fonction de α en prenant ϵ comme paramètre

$$\frac{t}{t_e} = \bar{t}^\epsilon(\alpha) := \frac{2 \arccos \alpha}{\pi(1 - \bar{a}^\epsilon(\alpha)^2)}. \quad (2.47)$$

La fonction $\bar{t}^\epsilon(\alpha)$ commence à t_i/t_e correspondant à $\alpha = 0$, puis décroît jusqu'à t_l/t_e correspondant à $\alpha = \alpha_l$ avant de croître à l'infini lorsque α tend vers 1, voir la figure 2.4. Il reste ainsi à étudier l'évolution de b en fonction de α avec la fonction $\bar{b}^\epsilon(\alpha)$

$$\frac{b}{\ell} = \bar{b}^\epsilon(\alpha) := \alpha \bar{a}^\epsilon(\alpha). \quad (2.48)$$

La figure 2.4 montre l'évolution de b avec α , qui commence à 0 correspondant à $\alpha = 0$ puis croît de manière monotone et tend vers ℓ lorsque α tend vers 1.

En conséquence, le triple (t, a, b) satisfaisant à (2.41) et (2.44) peut être considéré comme deux courbes $(t(\alpha), a(\alpha))$ et $(t(\alpha), b(\alpha))$ paramétrées par $\alpha \in (0, 1)$. Ces courbes dépendent de la longueur caractéristique ℓ et le rapport d_c/ℓ . En particulier, la courbe $(t(\alpha), a(\alpha))$ représente la branche partiellement non-cohésive sur le diagramme (t, a) , voir la figure 2.5. Du fait que les fonctions $\bar{a}^\epsilon(\alpha)$ et $\bar{t}^\epsilon(\alpha)$ sont respectivement non-monotone et décroissante monotonement pour petit α , la branche partiellement non-cohésive contient un snap-back dans un voisinage de (t_i, a_i) et un point à limite (t_l, a_l) . Les deux points dépendent de ℓ et d_c . Donc, la branche a la forme d'une boucle et peut être divisée en deux parties, dont la partie inférieure entre (t_i, a_i) et (t_l, a_l) et la partie supérieure après (t_l, a_l) .

Remarque 15. *Le fait que les deux longueurs a et b tendent vers une limite, ici la longueur caractéristique ℓ , lorsque t tend vers l'infini est dû au fait que la distribution de contrainte normale de la réponse élastique est négative à grande distance de l'origine, voir Remarque 7. Par ailleurs, la limite ℓ est supérieure à la distance $\ell/\sqrt{2}$ à laquelle la compression apparaît dans la solution élastique. Remarquons également que la limite de a et b dépend de la forme du développement de contrainte normale. On discutera plus de détails de cette limite lors de l'étude des formes générales de contrainte normale.*

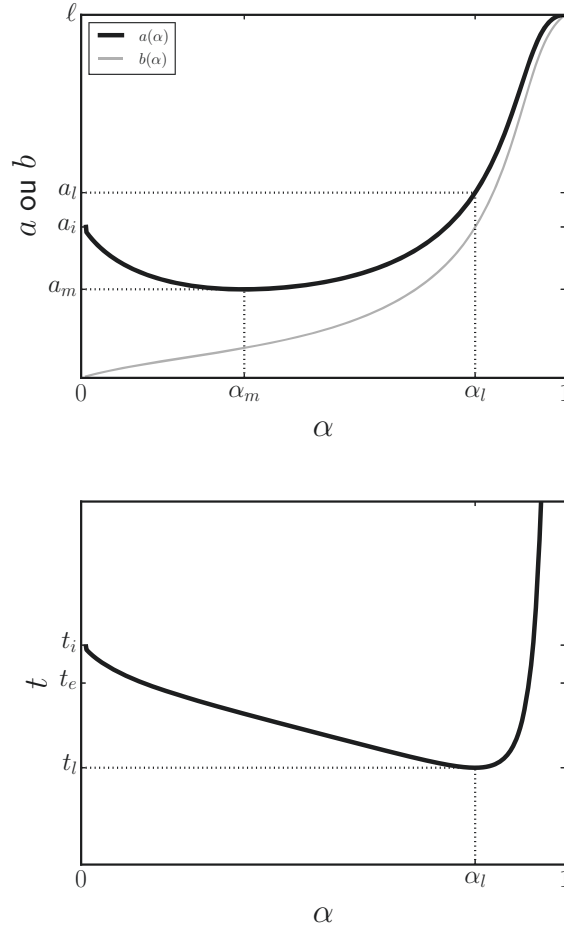


FIGURE 2.4 – Dépendance typique de a , b et t à $\alpha = b/a$. Ces courbes correspondent au cas où $d_c/\ell = 0.1$.

2.3.4 Discussion

2.3.4.1 Dépendance des courbes d'évolution de fissure aux longueurs caractéristiques (d_c, ℓ)

Afin d'étudier cette dépendance, on suppose que la contrainte critique cohésive σ_c est fixée. En conséquence, l'instant t_e correspondant à l'initiation de la fissure cohésive est fixé et la branche élastique est toujours la même. On considère ainsi la dépendance des branches d'évolution de fissure à d_c pour ℓ fixée, ou à ℓ pour d_c fixée.

- *Cas où ℓ est fixée.* Pour toutes les valeurs de d_c , la branche purement cohésive sur le diagramme (t, a) est toujours une partie de la courbe à fonction $a = \ell\sqrt{1 - t_e/t}$. Seulement le point final de cette branche (t_i, a_i) dépend de d_c , en particulier t_i et a_i sont fonctions croissantes de d_c (ainsi de $\epsilon = d_c/\ell$), voir (2.33)-(2.34) et la figure 2.6. D'une part, lorsque d_c (ou ϵ) tend

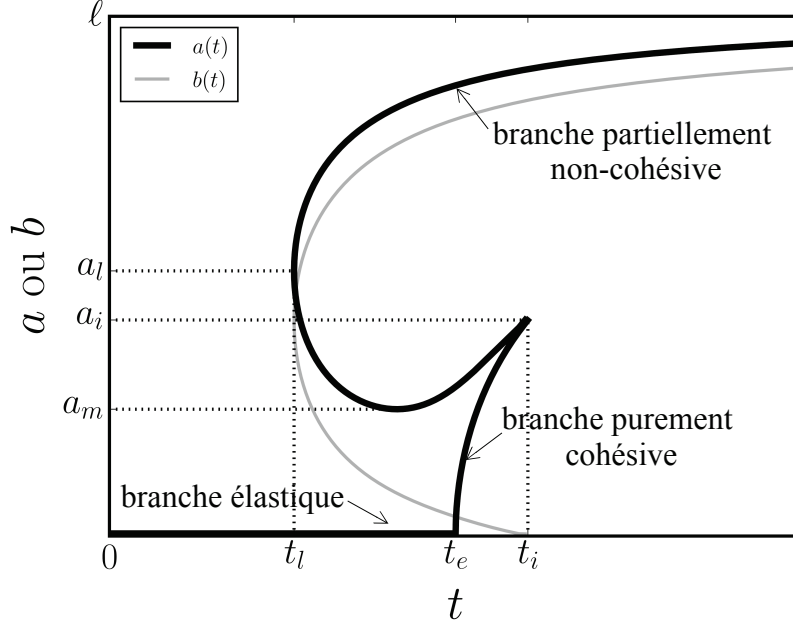


FIGURE 2.5 – Le graphe typique des trois branches sur le diagramme (t, a) . La courbe grise représente l'évolution de la pointe de la zone non-cohésive b pour la branche partiellement non-cohésive. Ces courbes correspondent au cas où $d_c/\ell = 0, 1$.

vers 0, t_i tend vers t_e et a_i/ℓ tend vers 0 à même ordre que $\epsilon^{1/3}$. D'autre part, lorsque d_c/ℓ tend vers l'infini, t_i tend vers l'infini et a_i tend vers ℓ fixée. Cela déduit que plus la longueur caractéristique du matériau d_c est petite, plus l'effet de stabilité du gradient de contrainte est faible. De même manière pour la branche partiellement non-cohésive, plus la longueur d_c est petite, plus le snap-back est accentué et plus la taille de la boucle est grande. Lorsque d_c tend vers 0, le paramètre α_m correspondant au point le plus bas de la boucle tend vers $1/e$ et ainsi le temps t_m tend vers $\frac{2t_e}{\pi} \arccos(1/e) \approx 0,760t_e$ tandis que $a_m \approx e d_c$ tend vers 0 à même ordre que d_c . La longueur de la fissure a_l correspondant au point à limite de la boucle tend vers $\ell/\sqrt{5}$ tandis que le temps associé $t_l \approx \frac{5^{5/4}}{\pi} \sqrt{\frac{d_c}{2\ell}} t_e$ tend vers 0 à même ordre que $\sqrt{\epsilon}$.

- *Cas où d_c est fixée.* En considérant un matériau fixé, la longueur d_c est fixée et on peut étudier l'influence du gradient de contrainte sur les branches d'évolution de fissure, voir la figure 2.7. Rappelons que plus le gradient de contrainte est important, plus la longueur ℓ est petite. En particulier, le cas de la distribution de contrainte normale uniforme correspond à $\ell = +\infty$. On voit que plus le gradient de contrainte est important, plus la branche purement cohésive est grande, plus la boucle de la branche partiellement non-cohésive est petite et plus la longueur finale de fissure est petite. L'évolution asymptotique de la fissure lorsque ϵ tend vers 0 (*i.e.* ℓ tend vers l'infini) est la même que dans le cas où ℓ est fixée.

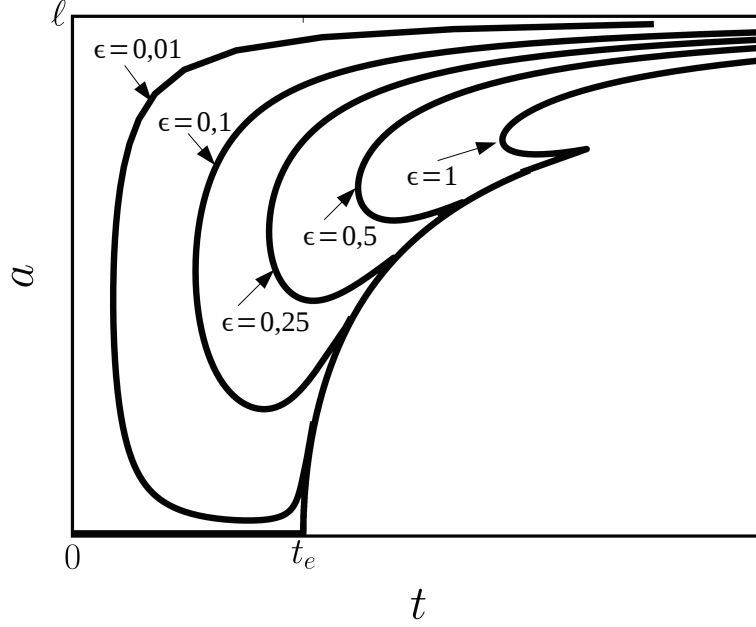


FIGURE 2.6 – Dépendance des branches d'évolution de fissure à la longueur caractéristique du matériau $d_c = \epsilon \ell$ pour la longueur caractéristique de gradient de contrainte ℓ fixée

2.3.4.2 Réponse sous un chargement croissant monotonement

Si la structure est soumise à un chargement croissant monotonement qui commence à $t = 0$ et croît à l'infini, la réponse est purement élastique à condition que $t \leq t_e$. Dans l'intervalle (t_e, t_i) , une fissure cohésive s'initie au sein de la structure et sa length s'agrandit de manière continue, la fonction $a(t)$ est monotone, croissante. A l'instant $t = t_i$, la longueur de la fissure cohésive est égale à a_i et l'ouverture maximale de la fissure (à $x_1 = 0$) atteint la valeur critique δ_c , ainsi la force cohésive à ce point s'annule. En conséquence, dès que le chargement est plus grand que t_i , il faudrait que l'une zone non-cohésive apparaisse au centre de la fissure. Du fait que la branche partiellement non-cohésive contient un snap-back, la réponse ne peut pas suivre sa boucle et donc l'évolution de la fissure devrait être discontinue à l'instant t_i . Si les effets d'inertie sont négligeables, le longueur totale de la fissure devrait sauter de a_i à la longueur a_i^* située sur la partie supérieure de la branche partiellement non-cohésive correspondant au même chargement t_i , voir la figure 2.8.

Le fait que l'on peut négliger les effets d'inertie lors de l'évolution discontinue de la longueur de fissure devrait être justifié par l'analyse dynamique prenant en compte le principe de conservation d'énergie. Des études concernant la propagation de la fissure de type Griffith dynamique sont détaillées dans les travaux de [Dumouchel et al., 2007; Charlotte et al., 2008; Lazzaroni et al., 2012]. Dans le cas où les effets d'inertie sont négligés, l'amplitude du saut de longueur de fissure dépend du paramètre sans dimension $\epsilon = d_c/\ell$: plus ϵ est petit, plus l'amplitude du saut est

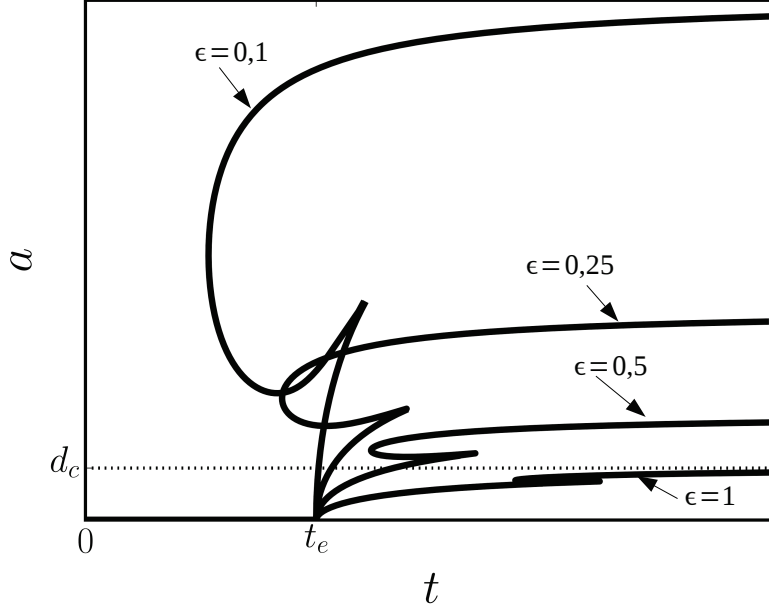


FIGURE 2.7 – Dépendance des branches d'évolution de fissure à la longueur caractéristique de gradient de contrainte $\ell = d_c/\epsilon$ pour la longueur caractéristique du matériau d_c .

importante. En particulier, pour la longueur caractéristique du matériau d_c est fixée, si ℓ est grande et ainsi ϵ est petit, a_i/ℓ est petit et de même ordre que $\epsilon^{1/3}$ tandis que a_i^* est grande et proche de ℓ . Cela déduit que la nucléation de la fissure non-cohésive est brutale et l'effet de stabilité du gradient de contrainte est faible. Au contraire, dans le cas où ℓ est de même ordre que d_c , l'amplitude de saut de longueur est faible et l'effet de stabilité du gradient de contrainte est important, voir la figure 2.7.

Remarque 16. *Il semble que la forme de la boucle et le snap-back de la branche partiellement non-cohésive ne jouent pas de rôle dans l'évolution de fissure sous un chargement croissant monotonement. En plus, on doute que le snap-back soit un concept purement mathématique de notre modélisation du fait le principe d'irréversibilité de la propagation de fissure n'est pas pris en compte. En effet, même si le chargement est diminué après la fin de la branche purement cohésive, la fissure ne peut pas suivre la branche partiellement non-cohésive parce que la longueur totale de la fissure a devrait décroître dans ce cas et cette évolution n'est pas admissible physiquement. Néanmoins, on montre dans la sous section prochaine que la boucle est observable lors de l'évolution de fissure et joue un rôle essentiel lors que la structure contient un défaut préexistant avant l'application du chargement.*

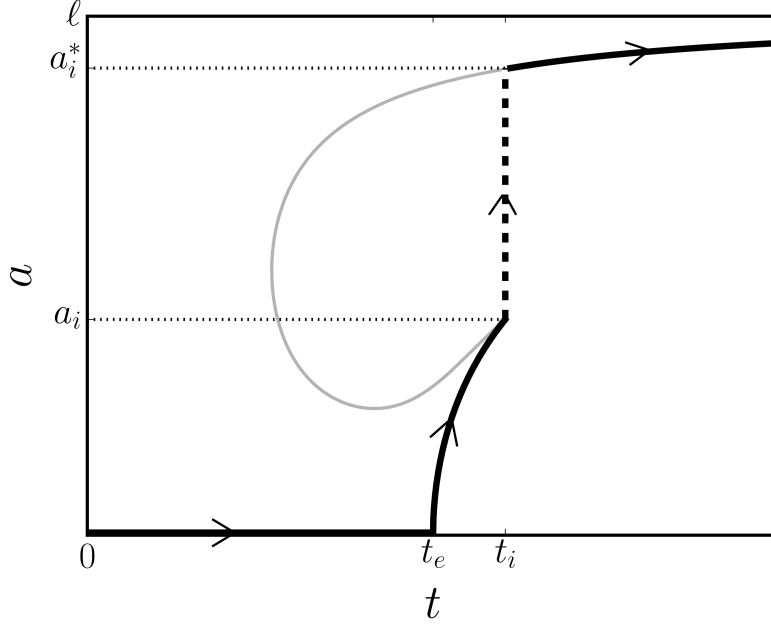


FIGURE 2.8 – Évolution de la longueur de la fissure sous un chargement croissant monotonement dans le cas où $d_c/\ell = 0, 1$. Le saut de la longueur de la fissure a lieu à l'instant $t = t_i$.

2.3.4.3 Sensibilité aux défauts pré-existants

Jusqu'à maintenant, toute notre analyse est réalisée dans le cas idéal dans lequel la structure est homogène et ne contient aucun défaut avant d'être soumise au chargement. Ce cas est appelé le *cas parfait* en opposition au cas avec un défaut pré-existant. Dans cette partie du chapitre, on considère le cas où le défaut correspond à une coupe initiale le long l'axe $x_2 = 0$, centrée à 0 et de mi-longueur $a_0 < \ell$. Autrement dit, on suppose que la structure contient une *fissure non-cohésive pré-existante* $(-a_0, a_0) \times \{0\}$ dont la longueur est un paramètre. La réponse purement élastique n'est plus une solution satisfaisant à la condition de stabilité locale et la zone cohésive de type Dugdale devrait s'initier en pointes du défaut $x_1 = \pm a_0$ dès que le chargement est appliqué, *i.e.* $t > 0$. La longueur totale de la fissure est notée $2a$. Le facteur d'intensité de contrainte devrait s'annuler en pointes des zones cohésives $x_1 = \pm a$ selon la Proposition 5. En supposant que la longueur totale de la fissure est toujours très petite devant les dimensions du domaine, *i.e.* $a_0 < a \ll L$, on peut utiliser l'approche à deux échelles présentée dans la Section 2.3.2. En particulier, le facteur d'intensité $K_I[t, a, b]$ correspondant au temps t , la mi-longueur totale de la fissure a et la mi-longueur de la zone non-cohésive b est toujours donné par l'expression (2.40). Donc, la relation entre a, b et t pour que le facteur d'intensité de contrainte s'annule écrite dans (2.41) est toujours valable. De même, l'ouverture de la fissure en pointe b , dénotée par $\llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b)$, est toujours donnée par (2.43). Deux relations nous permettent d'étudier l'évolution de la fissure avec un défaut pré-existant sous un chargement croissant monotonement.

L'évolution de la fissure peut contenir deux ou trois phases suivantes, selon la valeur de a_0

1. **Phase purement cohésive :** *Évolution de deux zones purement cohésives symétriques, les pointes de la zone non-cohésive restent à $\pm a_0$.* Pour le chargement t suffisamment petit, la fissure non-cohésive initiale ne se propage pas du fait que l'ouverture de fissure en pointes $\pm a_0$ est encore plus petite que δ_c , mais deux zones purement cohésives symétriques se propagent afin d'éliminer la singularité à $\pm a$. La relation entre a et t est donnée par la condition $K_I[t, a, a_0] = 0$, ainsi en injectant $b = a_0$ dans (2.41) on obtient

$$\frac{t}{t_e} = \frac{2}{\pi} \frac{\arccos \frac{a_0}{a}}{\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2}\right)}. \quad (2.49)$$

L'équation (2.49) nous donne une relation croissante monotonement entre t et a pour $a \in [a_0, \ell]$. Cette relation est ainsi inversible et a est une fonction croissante monotonement de t qui est égale à a_0 lorsque $t = 0$. Cela permet de définir la *branche purement cohésive* associée à la longueur initiale du défaut a_0 sur le diagramme (t, a) . En plus, pour a et t satisfaisant à la relation (2.49), l'ouverture de fissure de fissure à $b = a_0$ exprimée dans (2.43) devient

$$\llbracket u[t, a, a_0]_2 \rrbracket(a_0) = 8(1 - \nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \left(\frac{1}{3} \frac{t}{t_e} \frac{(a^2 - a_0^2)^{3/2}}{\ell^2} + \frac{a_0}{\pi} \ln \frac{a}{a_0} \right)$$

Donc l'ouverture à $\pm a_0$ est une fonction croissante de t prenant la valeur 0 à $t = 0$. Par construction, cette ouverture atteint la valeur critique δ_c lorsque le triple (a, a_0, t) satisfait les deux conditions (2.41) et (2.44). En conséquence, ce triple est le point sur la branche partiellement non-cohésive du *cas parfait* correspondant à $b = a_0$. Le paramètre associé α_0 est calculé grâce à l'équation

$$\bar{b}^\epsilon(\alpha_0)\ell = a_0$$

L'unicité de la solution est assurée par la monotonie de la fonction $\bar{b}^\epsilon(\alpha_0)$. Autrement dit, la phase purement cohésive se termine lorsque cette branche intersecte la boucle du cas parfait. En conclusion, la branche purement cohésive commence au point $(0, a_0)$ et s'arrête au point $(\bar{t}^\epsilon(\alpha_0)t_e, \bar{a}^\epsilon(\alpha_0)\ell)$ sur le diagramme (t, a) . Pendant cette phase, la longueur totale et l'ouverture le long de la fissure sont fonctions croissantes de t , donc il n'existe pas d'incompatibilité avec le principe d'irréversibilité.

2. **Saut possible de la longueur de fissure :** *Propagation brutale de la fissure si la branche purement cohésive intersecte la partie inférieure de la boucle du cas parfait.* D'une part, si le point final de la branche purement cohésive est plus bas que le point à limite de la boucle du cas parfait, *i.e.* si $\bar{a}^\epsilon(\alpha_0) < a_l$, l'évolution de fissure devrait être discontinue. En effet, l'évolution de fissure ne peut pas suivre la partie inférieure de la boucle dans la direction croissante du temps suite au principe d'irréversibilité. En conséquence, si on néglige les effets d'inertie, la possibilité unique est que le point juste après le saut de la longueur de fissure se situe au même temps $\bar{t}^\epsilon(\alpha_0)t_e$ sur la partie supérieure de la boucle. D'autre part, si le point final de la branche purement cohésive est coïncide ou au dessus du point à limite

de la boucle, *i.e.* si $\bar{a}^\epsilon(\alpha_0) \geq a_l$, l'évolution de fissure peut suivre continûment la partie supérieure de la boucle dans la direction croissante du temps et il n'existe pas de saut de longueur de fissure.

3. **Évolution continue de la fissure partiellement non-cohésive.** Dès que la partie supérieure de la boucle est atteinte après le saut de la longueur de fissure, l'évolution de la fissure suit simplement la partie supérieure de la boucle dans la direction croissante du temps. La longueur de fissure tend finalement vers ℓ lorsque t tend vers l'infini comme dans le cas parfait. Le système ignore finalement son défaut initial.

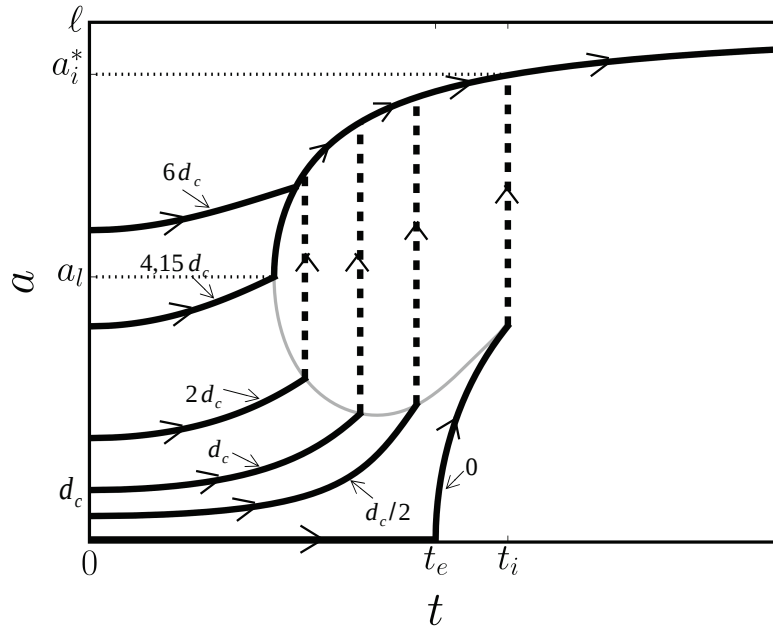


FIGURE 2.9 – Évolution de la longueur de fissure a sous un chargement croissant monotonement pour différentes valeurs a_0 de la fissure non-cohésive centrée initiale. Ici, $d_c/\ell = 0,1$ and $a_0 = 0; d_c/2; d_c; 2d_c; 4,15 d_c; 6 d_c$.

Tous ces résultats peuvent être visualisés dans la figure 2.9 correspondant à cinq cas différents de la taille du défaut pré-existant a_0 . Les trois premiers cas correspondant à petite a_0 conduit au saut de la longueur de fissure tandis que dans les deux derniers cas correspondant à a_0 suffisamment grande, l'évolution de fissure est continue. Évidemment, la longueur critique du défaut pré-existant, au delà de laquelle l'évolution de fissure est continue, dépend de ℓ et de d_c . Dans tous les cas, la boucle du cas parfait joue un rôle essentiel dans notre analyse.

2.3.5 Comparaison avec le modèle de Griffith

On compare maintenant l'évolution de fissure en utilisant le modèle de Dugdale avec le résultat obtenu en utilisant modèle de Griffith. Considérons une fissure non-cohésive centrée

Chapitre 2. Effets du champ de contrainte non-uniforme

initiale de mi-longueur $a_0 \ll L$ et on détermine le niveau de chargement t_0 auquel la fissure se propage selon le critère de Griffith. Du fait que la longueur de la fissure initiale est petite, les résultats de l'approche à deux échelles sont toujours valables. Suite à la manque de la force cohésive dans le modèle de Griffith, le champ de contrainte est singulier en pointes $\pm a_0$ de la fissure et le facteur d'intensité de contrainte est donné par (2.40) avec $a = b = a_0$.

$$K_I[t_0, a_0, a_0] = \sigma_c \sqrt{\pi a_0} \left(1 - \frac{a_0^2}{\ell^2} \right) \frac{t_0}{t_e}$$

En utilisant la formulation d'Irwin, le taux de restitution d'énergie G dans le problème de déformation plane est calculé comme suit

$$G = \pi(1 - \nu^2) \frac{\sigma_c^2}{E} a_0 \left(1 - \frac{a_0^2}{\ell^2} \right)^2 \frac{t_0^2}{t_e^2}$$

Le critère de propagation de fissure de Griffith $G = G_c$ permet de calculer le chargement t_0 sous lequel la fissure initiale de longueur $2a_0$ se propage. En remplaçant G_c par $\sigma_c \delta_c$ et injectant la longueur caractéristique d_c donnée par (2.11), la relation entre t_0 et a_0 s'écrit comme suit

$$\frac{t_0}{t_e} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{d_c}{a_0}} \frac{\ell^2}{\ell^2 - a_0^2}$$

Le graphique de cette relation sur le diagramme (t, a) se divise en deux branches partant du point (t_G, a_G) donné par

$$t_G = \frac{5^{5/4}}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon} t_e, \quad a_G = \frac{\ell}{\sqrt{5}}$$

Le long de la branche supérieure (au dessus de (t_G, a_G)), t_0 croît à l'infini lorsque a_0 croît vers ℓ , tandis que le long de la branche inférieure (au dessous de (t_G, a_G)), t_0 croît à l'infini lorsque a_0 décroît vers 0. En conséquence, lorsque $a_0 < a_G$, plus la longueur de la fissure initiale est petite, plus le chargement pour qu'elle se propage est grande. Dans le cas limite, la fissure ne peut pas s'initie à partir de la structure saine correspondant à $a_0 \rightarrow 0$, qui est une des lacunes principales du modèle de Griffith. Lorsque $0 < a_0 < a_G$ et on néglige les effets d'inertie, la longueur de fissure saute brutalement à t_0 au point a_0^* sur la branche supérieure de Griffith. Après ce saut de longueur de fissure, la fissure se propage continûment en suivant la branche supérieure de Griffith, voir la figure (2.10). Dans le cas contraire où la longueur initiale a_0 plus grande que a_G , l'évolution de fissure de Griffith est continue sans saut de longueur de fissure.

Comparons ces résultats avec le modèle de Dugdale. Pour de petites valeurs du paramètres ϵ , la partie supérieure de la branche partiellement non-cohésive de Dugdale est proche de la branche supérieure de Griffith. En particulier, lorsque ϵ tend vers 0, a_l tend vers a_G et le rapport t_l/t_G tend vers 1 tandis que t_l et t_G tendent vers 0 de même ordre que $\sqrt{\epsilon}$. Néanmoins, la partie inférieure de la branche partiellement non-cohésive et la branche purement cohésive du modèle de Dugdale sont toujours différentes de la branche inférieure de Griffith. En particulier, le chargement sous lequel la fissure cohésive s'initie ou le défaut préexistant se propage ne peut pas être plus grand que t_e dans le modèle de Dugdale, tandis que il n'est pas borné et dépend fortement de la taille de

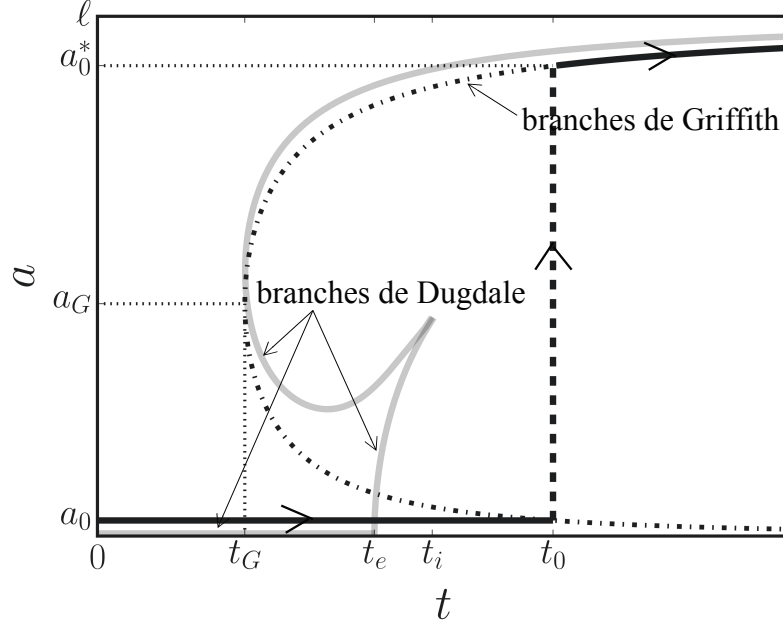


FIGURE 2.10 – Comparaison entre les branches de Dugdale les celles de Griffith pour $\epsilon = d_c/\ell = 0, 1$. En noir, la réponse associée au modèle de Griffith sous un chargement croissant monotone-ment lorsque la structure contient une fissure initiale de m-longueur $a_0 < a_G$.

la fissure initiale dans le cas de Griffith. Donc, le nucléation et la première phase de propagation de fissure sont très différentes en utilisant un des deux modèles. Par contre, lorsque la longueur de la fissure est suffisamment importante, les zones cohésives peuvent être négligées et les deux modèles donnent pratiquement les mêmes résultats.

2.4 Généralisation du problème par la série de distribution de contrainte normale

Dans cette section, on reprend l'analyse des branches d'évolution de fissure de type Dugdale en utilisant une forme plus générale du développement de la distribution de contrainte normale donnée dans (2.13). Ce développement est considéré maintenant jusqu'à un ordre supérieur quelconque. Ainsi, une série des paramètres sans dimensions et une longueur caractéristique devraient être introduites afin de caractériser la contrainte normale non-uniforme dans un voisinage du point où la fissure s'initie. En supposant que la longueur de fissure est toujours très petite devant les dimensions du domaine, l'approche à deux échelles est toujours utilisée dans notre analyse. Les résultats concernant la longueur et l'ouverture de la fissure purement cohésive, puis partiellement non-cohésive sont formulés analytiquement. Certains cas particuliers sont mis en comparaison avec le cas de la distribution quadratique de contrainte normale que l'on consi-

dère précédemment. Rappelons que dans le dernier, la longueur de fissure tend vers la longueur caractéristique du gradient de contrainte lorsque le chargement tend vers l'infini. On discutera dans la section cette valeur asymptotique de la longueur de fissure correspondant aux différentes distributions de contrainte normale.

2.4.1 Calculs analytiques avec l'approche à deux échelles

2.4.1.1 Détermination de la branche élastique

L'objectif est de réviser le problème élastique (2.3) en considérant une forme plus générale du champ de contrainte non-uniforme. Suite aux hypothèses de symétrie et de régularité, le vecteur de contrainte $\sigma^{\text{el}}(x_1)\mathbf{e}_2$ est purement normal et s'exprime comme suit

$$\sigma^{\text{el}}(x_1, 0)\mathbf{e}_2 = \Sigma(x_1)\mathbf{e}_2$$

La distribution de contrainte normale $\Sigma(x_1)$ est une fonction paire régulière de x_1 qui atteint sa valeur maximale à $x_1 = 0$. Le développement de cette fonction autour de $x_1 = 0$ peut être écrit sous la forme générale suivante

$$\Sigma(x_1) = \sigma_2^{\text{el}}(0, 0) + \frac{1}{2}\sigma_{2,11}^{\text{el}}(0, 0)x_1^2 + \dots + \frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}\sigma_2^{\text{el}}}{\partial x_1^{2n}}(0, 0)x_1^{2n} + \dots$$

Dans cette formulation, on suppose que la contrainte normale à l'origine $\sigma_2^{\text{el}}(0, 0)$ est positive et toutes ses dérivées d'ordres impaires $\frac{\partial^{2n}\sigma_2^{\text{el}}}{\partial x_1^{2n}}$ sont négatives. En introduisant une longueur caractéristique ℓ du gradient de contrainte et les paramètres sans dimension positifs $(\alpha_n)_n$, le développement de la distribution de contrainte normale s'écrit sous la forme d'une série suivante

$$\Sigma(x_1) = \sigma_2^{\text{el}}(0, 0) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{x_1^{2n}}{\ell^{2n}} \right) \quad (2.50)$$

Le temps t_e correspondant à la limite de validité de la réponse élastique est toujours donné par (2.12). Le champ de déplacement de la solution élastique correspondant au chargement $0 < t < t_e$ est donné simplement par $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{u}^{\text{el}}$. Au delà du chargement t_e , la structure contient une fissure centrée dans un voisinage de l'origine \mathbf{O} .

2.4.1.2 Détermination de la branche purement cohésive

Considérons une fissure purement cohésive de longueur $2a > 0$ à l'instant $t > 0$. Pour a et t donnés, on définit les champs associés de déplacement et de contrainte comme la solution *unique*, dénotée par $(\mathbf{u}[t, a], \sigma[t, a])$, du problème élastique linéaire posé sur la structure fissurée soumise à la contrainte cohésive *uniforme* sur les lèvres de la fissure. Le système d'équations s'écrit dans (2.24). Ce problème, et sa solution également, admettent les mêmes hypothèses de symétrie que le problème élastique original. Dans ce cas, du fait que la longueur de la fissure est beaucoup plus petite que les dimensions du domaine, la fissure perturbe les champs élastique seulement

2.4. Généralisation du problème par la série de distribution de contrainte normale

dans un voisinage de l'origine \mathbf{O} . En conséquence, introduisons dans (2.24) les différences entre la solution avec la fissure purement cohésive et la solution élastique, *i.e.*

$$\bar{\mathbf{u}}[t, a] = \mathbf{u}[t, a] - t\mathbf{u}^{\text{el}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a] = \boldsymbol{\sigma}[t, a] - t\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}$$

La différence de champ de contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a](\mathbf{x})$ devrait tendre vers 0 lors que $\|\mathbf{x}\|$ devient grand devant a . Par ailleurs, sur les lèvres de la fissure, la différence de contrainte normale vérifie la condition $\bar{\sigma}[t, a]_{22}(x_1) = \sigma_c - t\Sigma(x_1)$ où $\Sigma(x_1)$ est donné par (2.50). En injectant t_e donné dans (2.12), on obtient

$$\bar{\sigma}[t, a]_{22}(x_1) = \left(1 - \frac{t}{t_e}\right) \sigma_c + \frac{t}{t_e} \sigma_c \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{x_1^{2n}}{\ell^{2n}}, \quad |x_1| < a$$

En conséquence, le problème concernant les champs de différences $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}})$ dans un voisinage de l'origine s'exprime comme suit

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a] = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a] = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a])) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a]) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a](\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0} & \text{lorsque } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a](x_1, 0) \mathbf{e}_2 = \left(1 - \frac{t}{t_e} + \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{x_1^{2n}}{\ell^{2n}}\right) \sigma_c \mathbf{e}_2 & \text{lorsque } x_1 \in (-a, a) \end{cases} \quad (2.51)$$

On étudie le problème (2.51) de même manière que le cas précédent de la distribution de contrainte normale quadratique en utilisant la méthode des potentiels complexes développée par [Muskhelishvili, 1963]. Les procédures principales de cette méthode sont rappelées dans l'annexe 2.A et on présente directement ici les résultats en considérant la contrainte normale suivante

$$\mathbf{T}(x_1) = \left(1 - \frac{t}{t_e} + \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{x_1^{2n}}{\ell^{2n}}\right) \sigma_c$$

Le facteur d'intensité de contrainte en pointe de la fissure cohésive s'exprime comme suit grâce aux calculs d'intégrale (2.116)

$$\mathbf{K}_I[t, a] = \sigma_c \sqrt{\pi a} \left[\frac{t}{t_e} - 1 - \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} a^{2n} \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i} \right) \right] \quad (2.52)$$

La condition $\mathbf{K}_I[t, a] = 0$ nous donne une relation implicite entre la position de la pointe de la fissure cohésive et le temps

$$1 - \frac{t_e}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^{2n}}{\ell^{2n}} \alpha_n \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i} \right) \quad (2.53)$$

Du fait que les paramètres (α_n) sont positifs, la longueur de la fissure est fonction croissante du temps t et égale à 0 lorsque $t = t_e$. Cette solution est valable à condition que l'ouverture

de fissure à $x_1 = 0$ soit plus petite que δ_c . L'ouverture de fissure est calculée grâce au potentiel complexe défini dans l'annexe 2.A dont la dérivée s'exprime comme suit

$$\begin{aligned} \varphi'(z) = & -\frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) + \frac{\sigma_2}{2} \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{z^{2n}}{\ell^{2n}} \\ & - i \frac{\sigma_c}{2} \frac{t}{t_e} z \sqrt{a(t)^2 - z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} \left[z^{2(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} a(t)^{2i} z^{2(n-i-1)} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

où la longueur $a(t)$ est donnée par (2.53). Dans cette expression, on utilise les notations suivantes

$$(2i)!! = \prod_{j=1}^i 2j, \quad (2i-1)!! = \prod_{j=1}^i (2j-1)$$

Notons $z^\pm = x_1 \pm i0$ les points sur les lèvres supérieure et inférieure de fissure à x_1 pour $|x_1| \leq a(t)$. A partir de (2.54), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi'(z^\pm) = & -\frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) + \frac{\sigma_2}{2} \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{x_1^{2n}}{\ell^{2n}} \\ & \mp i \frac{\sigma_c}{2} \frac{t}{t_e} x_1 \sqrt{a(t)^2 - x_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} \left[x_1^{2(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} a(t)^{2i} x_1^{2(n-i-1)} \right] \end{aligned}$$

Cela déduit le saut de la dérivée du potentiel complexe à travers la fissure en utilisant les notations conventionnelles $0!! = (-1)!! = 1$

$$[\varphi']'(x_1) = -i \sigma_c x_1 \sqrt{a(t)^2 - x_1^2} \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} a(t)^{2i} x_1^{2(n-i-1)} \right)$$

Du fait que $[\varphi](\pm a(t)) = 0$, les calculs d'intégrale nous donnent $[\varphi](x_1)$. En utilisant la relation entre $[\varphi]$ et $[u(t)_2]$ présentée dans l'annexe 2.A, on en déduit que l'ouverture au centre de la fissure, *i.e.* $x_1 = 0$

$$[u(t)_2](0) = 4(1 - \nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} a(t)^{2n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!! (2(n-i-1))!!}{(2i)!! (2(n-i)+1)!!} \quad (2.55)$$

Du fait que la longueur de fissure est une fonction croissante de t , l'ouverture de fissure à $x_1 = 0$ est aussi une fonction croissante de t pour $t \geq t_e$. Lorsqu'elle atteint la valeur critique δ_c , la branche purement cohésive se termine et une zone non-cohésive apparaît au centre de la fissure. Le chargement critique t_i correspondant à cet instant se calcule grâce à l'équation implicite suivante

$$\frac{t_i}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} a(t_i)^{2n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!! (2(n-i-1))!!}{(2i)!! (2(n-i)+1)!!} = \frac{2}{\pi} d_c \quad (2.56)$$

2.4.1.3 Détermination de la branche partiellement non-cohésive

On considère finalement le cas d'une fissure partiellement non-cohésive à l'instant t . La longueur de la zone non-cohésive est $2b$ et les pointes des fissures cohésives se situent à $\pm a$. Correspondant à (t, a, b) donnés pour $0 < b < a$ et $t > 0$, on définit les champs de déplacement et de contrainte associés comme la solution *unique*, dénotée par $(\mathbf{u}[t, a, b], \boldsymbol{\sigma}[t, a, b])$, du problème élastique linéaire donné par (2.36) posé sur la structure soumise à la contrainte cohésive non-uniforme sur les lèvres de fissure. Ce problème, et sa solution également, admettent les mêmes hypothèses de symétrie que le problème élastique original. Dans ce cas, du fait que la longueur de la fissure est beaucoup plus petite que les dimensions du domaine, la fissure perturbe les champs élastique seulement dans un voisinage de l'origine \mathbf{O} . En conséquence, on introduit dans le système d'équation (2.36) les différences de la solution entre la solution avec fissure et la solution élastique, *i.e.*

$$\bar{\mathbf{u}}[t, a, b] = \mathbf{u}[t, a, b] - t\mathbf{u}^{\text{el}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b] = \boldsymbol{\sigma}[t, a, b] - t\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}$$

En utilisant les mêmes approximations et hypothèses que le cas de fissure purement cohésive, le problème concernant les champs de différences dans un voisinage de l'origine s'écrit comme (2.37) avec la distribution de contrainte normale suivante

$$\mathbf{T}(x_1) = \begin{cases} \left(-\frac{t}{t_e} + \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{x_1^{2n}}{\ell^{2n}} \right) \sigma_c & \text{si } |x_1| < b \\ \left(1 - \frac{t}{t_e} + \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{x_1^{2n}}{\ell^{2n}} \right) \sigma_c & \text{si } b < |x_1| < a \end{cases} \quad (2.57)$$

Ce problème peut être toujours résolu analytiquement parce qu'il est encore un cas particulier de la famille des problèmes élastiques planes présenté dans l'annexe. Correspondant à un triple (t, a, b) , la solution $\mathbf{u}[t, a, b]$ est unique à un déplacement du corps rigide près et le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}[t, a, b]$ est unique. Pour un temps $t > 0$ donné, la solution appartient à la branche partiellement non-cohésive seulement si a et b satisfont les conditions concernant le facteur d'intensité de contrainte en pointe de la zone cohésive $K_I[t, a, b]$ et l'ouverture de fissure en pointe de la zone non-cohésive (voir Propositions 5-6)

$$\begin{cases} K_I[t, a, b] = 0 \\ \llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b) = \delta_c \end{cases} \quad (2.58)$$

En utilisant la distribution de contrainte normale (2.57), le facteur d'intensité de contrainte en pointe de la fissure cohésive s'exprime comme suit grâce aux calculs d'intégrale (2.116)

$$K_I[t, a, b] = \sigma_c \sqrt{\pi a} \left[\frac{t}{t_e} - 1 - \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^{2n}}{\ell^{2n}} \alpha_n \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i} \right) + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{b}{a} \right] \quad (2.59)$$

La condition $K_I[t, a, b] = 0$ nous donne une première relation suivante implicite entre a, b et t

$$\frac{t}{t_e} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^{2n}}{\ell^{2n}} \alpha_n \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i} \right) \right] = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{b}{a} \quad (2.60)$$

Afin de calculer l'ouverture de la fissure en pointe de la zone non-cohésive $\llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b)$, il faudrait considérer le saut du potentiel complexe $\varphi(z)$ défini dans l'annexe 2.A sur les lèvres de la zone cohésive, *i.e.* $\llbracket \varphi \rrbracket(x_1)$ pour $b < |x_1| < a$. En utilisant (2.57) et (2.60) et la méthode présentée dans l'annexe 2.A, on obtient

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket'(x_1) = & -2i\sigma_c \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arctanh} \left(\frac{b}{x_1} \sqrt{\frac{a^2 - x_1^2}{a^2 - b^2}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2}}{2} \frac{t}{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} a^{2i} x_1^{2(n-i-1)} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

Du fait que $\llbracket \varphi \rrbracket(a) = 0$, l'intégrale de (2.61) sur la zone cohésive nous donne le saut du potentiel complexe en pointe de la zone non-cohésive

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket(b) = & i\sigma_c \left[2 \frac{b}{\pi} \ln \frac{a}{b} \right. \\ & + \frac{t}{t_e} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} a^{2n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!!(2(n-i-1))!!}{(2i)!!(2(n-i)+1)!!} \\ & + \frac{t}{t_e} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} a^{2n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!!(2(n-i-1))!!}{(2i)!!(2(n-i)+1)!!} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!} \left(\frac{b}{a} \right)^{2j+2} \\ & \left. - \frac{t}{t_e} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} a^{2n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \frac{1}{2(n-i)+1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2(n-i)} \right] \end{aligned}$$

En utilisant la relation entre le saut de déplacement et le saut du potentiel complexe donnée dans l'annexe 2.A, on en déduit le saut de déplacement au point $x_1 = b$. Suite à la deuxième condition du système (2.58), on obtient la deuxième relation entre a, b et t

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} d_c = & \frac{2b}{\pi} \ln \frac{a}{b} \\ & + \frac{t}{t_e} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} a^{2n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!!(2(n-i-1))!!}{(2i)!!(2(n-i)+1)!!} \\ & + \frac{t}{t_e} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} a^{2n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!!(2(n-i-1))!!}{(2i)!!(2(n-i)+1)!!} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!} \left(\frac{b}{a} \right)^{2j+2} \\ & - \frac{t}{t_e} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\ell^{2n}} a^{2n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \frac{1}{2(n-i)+1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2(n-i)} \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.4.2 Représentation des trois branches dans des cas particuliers

2.4.2.1 Cas du développement de distribution de contrainte jusqu'à l'ordre 2

Dans ce cas, un seul paramètre α_1 avec la longueur ℓ sont introduits afin de caractériser la distribution de contrainte normale non-uniforme. Par conséquent, la distribution de contrainte

2.4. Généralisation du problème par la série de distribution de contrainte normale

normale (2.50) se réduit simplement à

$$\Sigma(x_1) = \sigma_c \frac{t}{t_e} \left(1 - \alpha_1 \frac{x_1^2}{\ell^2} \right)$$

En choisissant $\alpha_1 = 2$, on retrouve les résultats dans l'analyse précédente de la distribution quadratique de la contrainte normale.

2.4.2.2 Cas du développement de distribution de contrainte jusqu'à l'ordre 4

Dans ce cas, deux paramètres (α_1, α_2) avec la longueur ℓ sont introduits afin de caractériser la distribution de contrainte normale non-uniforme. On choisit l'ensemble des valeurs suivantes des paramètres pour étudier les branches d'évolution de fissure en forme analytique

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{8}{3} \quad (2.63)$$

La distribution de la contrainte normale $\Sigma(x_1)$ de la réponse élastique donnée par (2.50) se réduit à la forme suivante en utilisant l'expression de t_e dans (2.12)

$$\Sigma(x_1) = \sigma_c \frac{t}{t_e} \left(1 - 2 \frac{x_1^2}{\ell^2} - \frac{8}{3} \frac{x_1^4}{\ell^4} \right) \quad (2.64)$$

Rappelons que la *branche élastique* commence à $t = 0$ et se termine lorsque le chargement t atteint la valeur t_e . Cette branche correspond au segment $[0, t_e] \times \{0\}$ sur le diagramme (t, a) . Au delà du chargement t_e , la fissure s'initie et se propage au sein de la structure. On détaille deux branches de cette évolution, *branche purement cohésive* et *branche partiellement non-cohésive*, correspondant à la distribution (2.64) de $\Sigma(x_1)$.

(i) **Branches purement cohésive.** A l'instant t , une fissure cohésive de longueur $2a$ est présente au sein de la structure pour que la condition concernant le facteur d'intensité de contrainte en pointes de fissure $K_I[t, \pm a] = 0$ soit satisfaite. Cette condition déduit la relation générale (2.53) entre la mi-longueur de la fissure a et le chargement t qui se réduit dans ce cas comme suit

$$\frac{t}{t_e} \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^4}{\ell^4} \right) = 1 \quad (2.65)$$

Ainsi, le chargement est une fonction croissante monotonement de la longueur de la fissure. Cette relation est donc inversible et on déduit que la longueur de la fissure est une fonction continue, croissante monotonement du chargement. La solution est valable jusqu'à ce que l'ouverture de la fissure à $x_1 = 0$ atteigne la valeur critique δ_c . Correspondant à la distribution de contrainte normale (2.64), l'expression générale (2.55) de l'ouverture de fissure à l'origine devient

$$\llbracket u[t, a]_2 \rrbracket(0) = 8(1 - \nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \left[\frac{1}{3} \frac{t}{t_e} \frac{a(t)^3}{\ell^2} + \frac{2}{5} \frac{t}{t_e} \frac{a(t)^5}{\ell^4} \right] \quad (2.66)$$

où $a(t)$ est calculée par (2.65). Donc l'ouverture de fissure à $x_1 = 0$ est également une fonction croissante monotonement de t pour $t \geq t_e$. Elle atteint la valeur critique cohésive δ_c à l'instant

t_i donné par l'équation implicite

$$\frac{d_c}{\pi \ell} = \frac{t_i}{t_e} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \frac{a(t_i)^2}{\ell^2} \right) \frac{a(t_i)^3}{\ell^3} \quad (2.67)$$

(ii) **Branches partiellement non-cohésive.** A l'instant $t > 0$, une fissure partiellement non-cohésive dont la longueur de la partie non-cohésive est $2b$ et les pointes des zones cohésives se situent à $\pm a$ pour que la condition concernant le facteur d'intensité de contrainte en pointes de la zone cohésive $K_I[t, a, b] = 0$ soit satisfaite. Cette condition déduit une première relation (2.60) entre deux longueurs (a, b) et le chargement t qui se réduit dans ce cas comme suit

$$\frac{t}{t_e} \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^4}{\ell^4} \right) = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{b}{a} \quad (2.68)$$

Correspondant à la distribution de contrainte normale (2.64), l'ouverture de la fissure en pointe de la non-cohésive $x_1 = b$ s'écrit comme suit

$$\llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b) = 8(1-\nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \left[\frac{b}{\pi} \ln \frac{a}{b} + \frac{1}{3} \frac{t}{t_e} \frac{(a^2 - b^2)^{3/2}}{\ell^2} + \frac{t}{t_e} \frac{1}{\ell^4} \left(\frac{2a^2}{3} (a^2 - b^2)^{3/2} - \frac{4}{15} (a^2 - b^2)^{5/2} \right) \right] \quad (2.69)$$

La condition $\llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b) = \delta_c$ nous donne la deuxième relation entre a, b et t

$$b \ln \frac{a}{b} + \frac{\pi}{3} \frac{t}{t_e} \frac{(a^2 - b^2)^{3/2}}{\ell^2} + \frac{t}{t_e} \frac{\pi}{\ell^4} \left(\frac{2a^2}{3} (a^2 - b^2)^{3/2} - \frac{4}{15} (a^2 - b^2)^{5/2} \right) = d_c \quad (2.70)$$

Les deux longueurs (a, b) sont liées au chargement t par les deux relations (2.68) et (2.70). Afin d'étudier l'évolution de la fissure partiellement non-cohésive, on introduit une variable sans dimension suivante

$$\alpha = \frac{b}{a} \in (0, 1)$$

En injectant (2.68) et cette variable dans (2.70), on obtient

$$- \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^4}{\ell^4} \right) \left(\frac{a}{\ell} \alpha \ln \alpha + \frac{d_c}{\ell} \right) + \frac{2 \arccos \alpha}{3} (1 - \alpha^2)^{3/2} \left[\frac{a^3}{\ell^3} + 2 \frac{a^5}{\ell^5} - \frac{4}{5} (1 - \alpha^2) \frac{a^5}{\ell^5} \right] = 0 \quad (2.71)$$

Pour $\alpha \in (0, 1)$ donnée, (2.71) est une équation de cinquième ordre pour $\bar{a} := a/\ell$ qui dépend du paramètre $\epsilon := d_c/\ell$. Cette équation admet une solution unique, dénotée par $\bar{a}^\epsilon(\alpha)$. Cette solution dépend de α de manière non-monotone. En effet, $\bar{a}^\epsilon(\alpha)$ commence de $a_i/\ell = \sqrt{1 - t_e/t_i}$ correspondant à $\alpha = 0$, puis décroît jusqu'à a_m/ℓ avant de croître et finalement tend vers la

limite $a_c := \ell \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} < \ell$ lorsque α tend vers 1, voir la figure 2.4. Par ailleurs, (2.68) permet d'écrire t/t_e en fonction de α en prenant ϵ comme paramètre

$$\frac{t}{t_e} = \bar{t}^\epsilon(\alpha) := \frac{2 \arccos \alpha}{\pi (1 - \bar{a}^\epsilon(\alpha)^2 - \bar{a}^\epsilon(\alpha)^4)} \quad (2.72)$$

2.4. Généralisation du problème par la série de distribution de contrainte normale

La fonction $\bar{t}^\epsilon(\alpha)$ commence de t_i/t_e correspondant à $\alpha = 0$, puis décroît jusqu'à t_l/t_e qui est atteint à $\alpha = \alpha_l$ avant de croître vers l'infini lorsque α tend vers 1, voir la figure 2.11. Il reste ainsi à étudier l'évolution de b en fonction de α avec la fonction $\bar{b}^\epsilon(\alpha)$

$$\frac{b}{\ell} = \bar{b}^\epsilon(\alpha) := \alpha \bar{a}^\epsilon(\alpha). \quad (2.73)$$

La figure 2.4 montre l'évolution de b avec α , qui commence de 0 correspondant à $\alpha = 0$ puis croît de manière monotone et tend vers $a_c = \ell \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ lorsque α tend vers 1.

En conséquence, les triples (t, a, b) satisfaisant (2.68) et (2.70) peuvent être considérés comme deux courbes $(t(\alpha), a(\alpha))$ et $(t(\alpha), b(\alpha))$ paramétrées par $\alpha \in (0, 1)$. Ces courbes dépendent de la longueur caractéristique ℓ et le rapport d_c/ℓ . En particulier, la courbe $(t(\alpha), a(\alpha))$ représente deux branches d'évolution de fissure dont la branche partiellement non-cohésive sur le diagramme (t, a) , voir la figure 2.12. Du fait que les fonctions $\bar{a}^\epsilon(\alpha)$ et $\bar{t}^\epsilon(\alpha)$ sont respectivement non-monotone et décroissante monotonement pour petit α , la branche partiellement non-cohésive $a(t)$ contient un snap-back dans un voisinage de (t_i, a_i) et un point à limite (t_l, a_l) . Les deux points dépendent de ℓ et d_c . Donc, la branche a la forme d'une boucle peut être divisée en deux parties, dont la partie inférieure entre (t_i, a_i) et (t_l, a_l) et la partie supérieure après (t_l, a_l) .

La dépendance des courbes d'évolution de fissure aux deux longueurs caractéristiques liées au comportement du matériau d_c et au gradient de contrainte ℓ est étudiée comme dans le cas précédent de la distribution quadratique de la contrainte normale. En fixant la contrainte critique σ_c du modèle cohésif, ainsi le chargement t_e correspondant à l'initiation de la fissure cohésive, l'évolution de la fissure pour ℓ fixée et différentes d_c est montrée dans la figure 2.13, puis pour d_c fixée et différentes ℓ est montrée dans la figure 2.14. Les propriétés des courbes sont similaires au cas précédent.

Par ailleurs, la réponse sous le chargement croissant monotonement est montrée dans la figure 2.15. Ainsi, la solution élastique est valable lorsque le chargement t est dans l'intervalle $(0, t_e)$, puis la fissure purement cohésive se propagation continûment pour $t \in (t_e, t_i)$ et la longueur de la fissure devrait sauter à l'instant t_i lorsque la zone non-cohésive apparaît au centre de la fissure. Si on néglige les effets d'inertie, à l'instant t_i la longueur de la fissure saute de la valeur a_i à la valeur a_i^* située sur la partie supérieure la la branche partiellement non-cohésive.

Sensibilité aux défauts pré-existants. Comme dans le cas précédent de la distribution quadratique de la contrainte normale, la forme de la boucle et la partie snap-back de la branche partiellement non-cohésive ne jouent pas de rôle dans la propagation de fissure sous un chargement croissant monotonement (voir Remarque 16). Néanmoins, cette boucle joue un rôle essentiel dans l'étude des effets de l'imperfection sur la réponse de la structure fissurée. On considère le cas où le défaut correspond à une coupe initiale le long l'axe $x_2 = 0$, centrée à \mathbf{O} et de mi-longueur $a_0 < \ell$. Autrement dit, on suppose que la structure contient une *fissure non-cohésive pré-existante* $(-a_0, a_0) \times \{0\}$ dont la longueur est un paramètre. La réponse purement élastique n'est plus une solution satisfaisant la condition de stabilité locale et la zone cohésive de type Dugdale devrait s'initier en pointes du défaut $x_1 = \pm a_0$ dès que le chargement est appliqué, *i.e.* $t > 0$. La longueur totale de la fissure est notée $2a$. Le facteur d'intensité de contrainte devrait

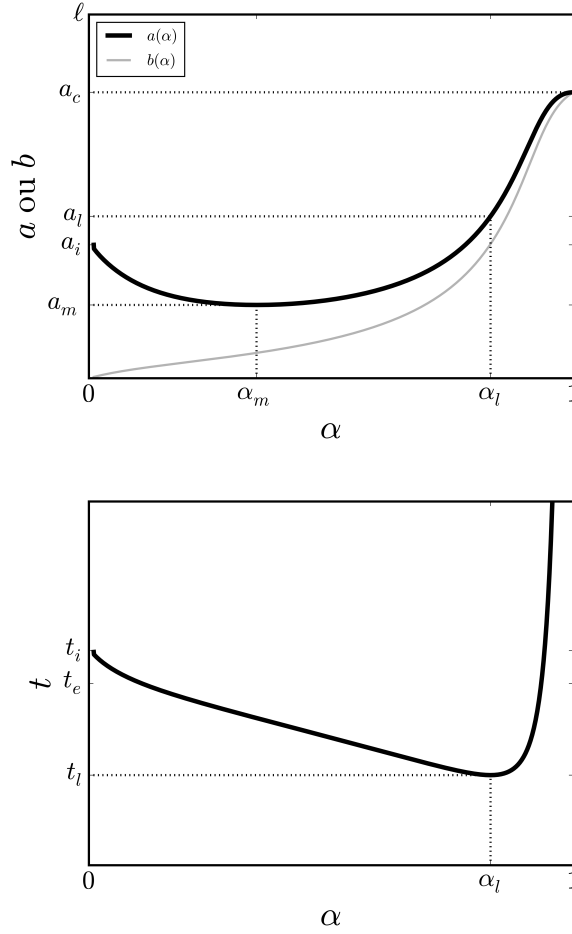


FIGURE 2.11 – Dépendance typique de a , b et t à $\alpha = b/a$. Ces courbes correspondent au cas où $d_c/\ell = 0, 1$.

s'annuler en pointes des zones cohésives $x_1 = \pm a$. Donc, la relation entre a, b et t pour que le facteur d'intensité de contrainte s'annule écrite dans (2.68) est toujours valable. De même, l'ouverture de la fissure en pointes $\pm b$, dénotée par $\llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b)$, est toujours donnée par (2.69). Deux relations nous permettent d'étudier l'évolution de la fissure avec un défaut initial sous un chargement croissant monotonement. On considère brièvement l'évolution de la fissure qui peut contenir deux ou trois phases suivante, selon la valeur de a_0

1. **Phase purement cohésive :** *Évolution de deux zones purement cohésives symétriques, les pointes de la zone non-cohésive restent à $\pm a_0$.* Pour le chargement t suffisamment petit, la fissure non-cohésive initiale ne se propage pas du fait que l'ouverture de fissure en pointes $\pm a_0$ est encore plus petite que δ_c , mais deux zones purement cohésives symétriques se propagent afin d'éliminer la singularité à $\pm a$. La relation entre a et t est donnée par la condition $K_I[t, a, a_0] = 0$, ainsi en injectant $b = a_0$ dans (2.68) on obtient

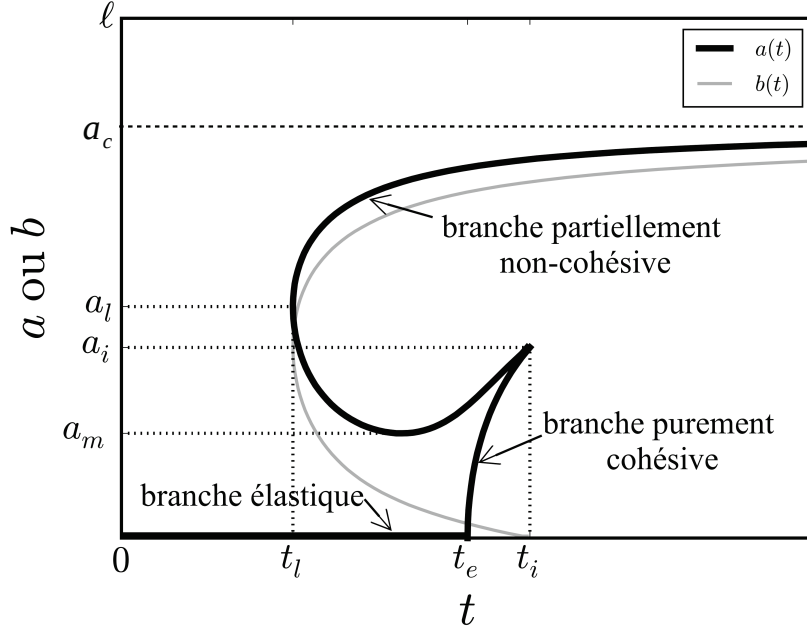


FIGURE 2.12 – Le graphe typique des trois branches sur le diagramme (t, a) . La courbe grise représente l'évolution de la pointe de la zone non-cohésive b pour la branche partiellement non-cohésive. Ces courbes correspondent au cas où $d_c/\ell = 0, 1$.

$$\frac{t}{t_e} = \frac{2}{\pi} \frac{\arccos \frac{a_0}{a}}{\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^2}{\ell^4}\right)}. \quad (2.74)$$

L'équation (2.74) nous donne une relation croissante monotonement entre t et a pour $a \in [a_0, \ell]$. Cette relation est ainsi inversible et a est une fonction croissante monotonement de t prenant la valeur a_0 à $t = 0$. Cela permet de définir la *branche purement cohésive* associée à la longueur initiale du défaut a_0 sur le diagramme (t, a) . En plus, pour a et t satisfaisant la relation (2.74), l'ouverture de fissure de fissure à $b = a_0$ exprimée dans (2.69) devient

$$\llbracket u[t, a, a_0]_2 \rrbracket(a_0) = 8(1 - \nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \left[\frac{a_0}{\pi} \ln \frac{a}{a_0} + \frac{1}{3} \frac{t}{t_e} \frac{(a^2 - a_0^2)^{3/2}}{\ell^2} + \frac{t}{t_e} \frac{1}{\ell^4} \left(\frac{2a^2}{3} (a^2 - a_0^2)^{3/2} - \frac{4}{15} (a^2 - a_0^2)^{5/2} \right) \right]$$

Donc l'ouverture à $\pm a_0$ est une fonction croissante de t prenant la valeur 0 à $t = 0$. Par construction, cette ouverture atteint la valeur critique δ_c lorsque le triple (a, a_0, t) satisfait les deux conditions (2.68) et (2.70). En conséquence, ce triple est le point sur la branche

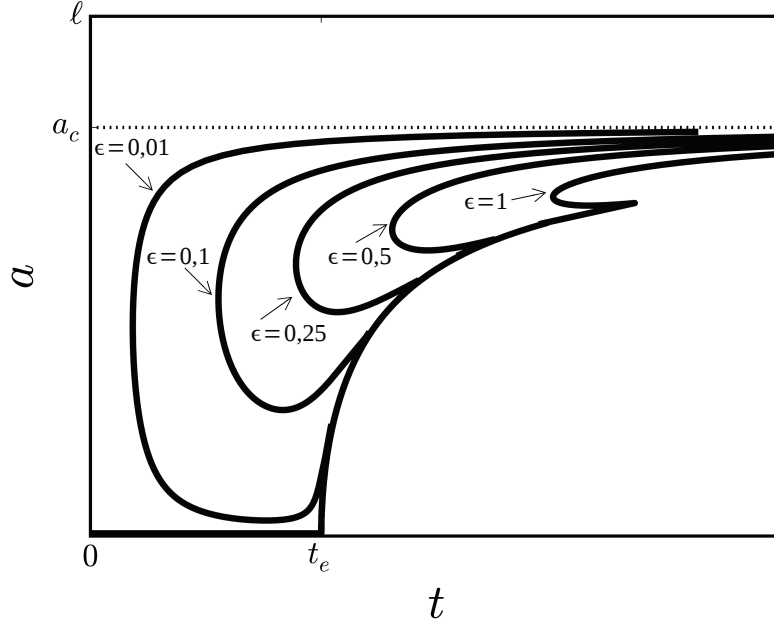


FIGURE 2.13 – Dépendance des branches d'évolution de fissure à la longueur caractéristique du matériau $d_c = \epsilon\ell$ pour la longueur caractéristique de gradient de contrainte ℓ fixée

partiellement non-cohésive du *cas parfait*, *i.e.* le cas sans défaut préexistant, correspondant à $b = a_0$. Le paramètre associé α_0 est calculé grâce à l'équation

$$\bar{b}^\epsilon(\alpha_0)\ell = a_0$$

L'unicité de la solution est assurée par la monotonie de la fonction $\bar{b}^\epsilon(\alpha_0)$. Autrement dit, la phase purement cohésive se termine lorsque cette branche intersecte la boucle du cas parfait. En conclusion, la branche purement cohésive commence au point $(0, a_0)$ et s'arrête au point $(\bar{t}^\epsilon(\alpha_0)t_e, \bar{a}^\epsilon(\alpha_0)\ell)$ sur le diagramme (t, a) . Pendant cette phase, la longueur totale et l'ouverture le long de la fissure sont fonctions croissantes de t , donc il n'existe pas d'incompatibilité avec le principe d'irréversibilité.

2. **Saut possible de la longueur de fissure :** *Propagation brutale de la fissure si la branche purement cohésive intersecte la partie inférieure de la boucle du cas parfait.* Le point d'intersection entre la branche purement cohésive et la boucle du problème parfait, ainsi l'évolution de la fissure avec le défaut pré-existant, dépendent de la mi-longueur a_0 de la fissure initiale. Lorsque a_0 est petite, le point d'intersection est plus bas que le point limite de la boucle, *i.e.* $\bar{a}^\epsilon(\alpha_0) < a_l$, il existe un saut de longueur de fissure et l'évolution de la fissure est discontinue après la branche purement cohésive. Par contre, si a_0 est suffisamment grande, le point d'intersection est coïncide ou plus haut que le point limite de la boucle, *i.e.* $\bar{a}^\epsilon(\alpha_0) \geq a_l$, l'évolution de fissure suit continûment la partie supérieure de la boucle.

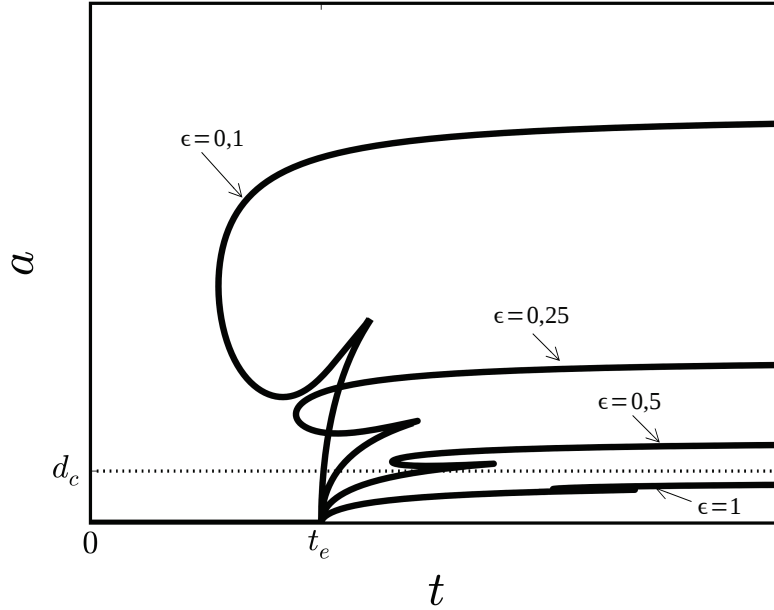


FIGURE 2.14 – Dépendance des branches d'évolution de fissure à la longueur caractéristique de gradient de contrainte $\ell = d_c/\epsilon$ pour la longueur caractéristique du matériau d_c .

3. **Évolution continue de la fissure partiellement non-cohésive.** Dès que la partie supérieure de la boucle est atteinte après le saut de la longueur de fissure, l'évolution de la fissure suit simplement la partie supérieure de la boucle dans la direction croissante du temps. La longueur de fissure tend finalement vers $a_c = \ell \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ lorsque t tend vers l'infini comme dans le cas parfait. Le système ignore finalement son défaut initial.

Les courbes d'évolution de la fissure avec défaut pré-existant peuvent être visualisées dans la figure 2.16 correspondant à cinq cas différents de la taille du défaut initial a_0 . Les trois premiers cas correspondant à petite a_0 conduisent au saut de la longueur de fissure tandis que dans les deux derniers cas correspondant à a_0 suffisamment grande (concrètement $a_0 \geq 4,65d_c$ avec notre choix des valeurs des paramètres pour que $d_c/\ell = 0,1$), l'évolution de fissure est continue. Évidemment, la longueur critique du défaut pré-existant, au delà de laquelle l'évolution de fissure est continue, dépend de ℓ et de d_c . Dans tous les cas, la boucle du cas parfait joue un rôle essentiel dans notre analyse.

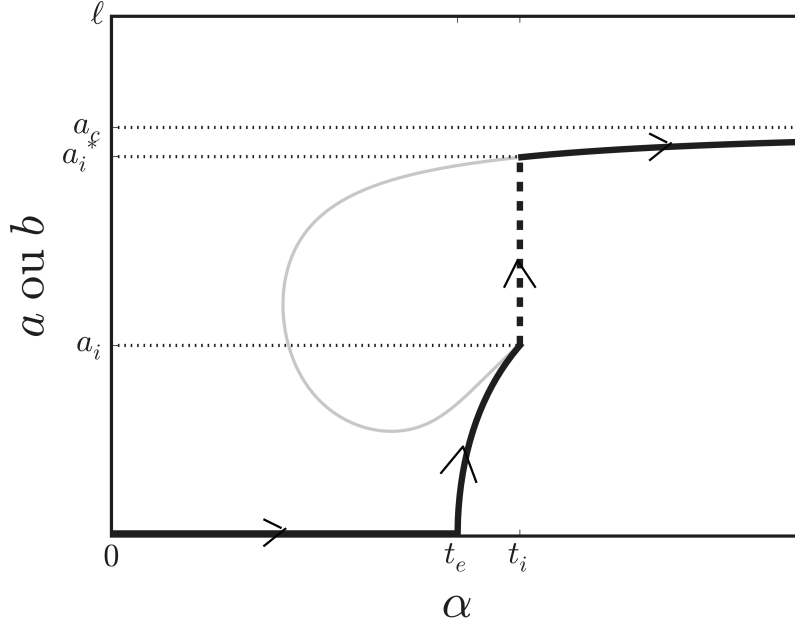


FIGURE 2.15 – Évolution de la longueur de la fissure sous un chargement croissant monotonement dans le cas où $d_c/\ell = 0, 1$. Le saut de la longueur de la fissure a lieu à l'instant $t = t_i$.

2.5 Généralisation du problème avec la loi cohésive de type Barenblatt

L'objectif de cette section est de généraliser des résultats d'évolution de la fissure que l'on étudie précédemment pour des lois cohésives de type Barenblatt. Dans ce type de modèles, la contrainte cohésive n'est pas constante le long de la zone cohésive, *i.e.* la zone où $0 < \llbracket u_2 \rrbracket < \delta_c$, mais dépend du saut de déplacement normal $\llbracket u_2 \rrbracket$. Cette dépendance induit des équations intégral-différentielles dont la solution analytique n'est pas disponible. En conséquence, on présente dans cette section une méthode semi-analytique utilisant le développement en série des polynômes de Tchebychev afin de résoudre le problème d'évolution de fissure. Les hypothèses de la structure et son comportement élastique, du chargement, de la symétrie et de la régularité sont les mêmes que dans les sous-sections 2.2.1-2.2.2. On rappelle tout d'abord quelques ingrédients principaux de la loi cohésive de Barenblatt, puis les problèmes d'évolution de la fissure purement cohésive et partiellement non-cohésive sont formulés de manière générale. Les calculs semi-analytiques avec la série des polynômes de Tchebychev sont ensuite détaillés dans un cas spécial de la loi cohésive de type Barenblatt *linéaire*.

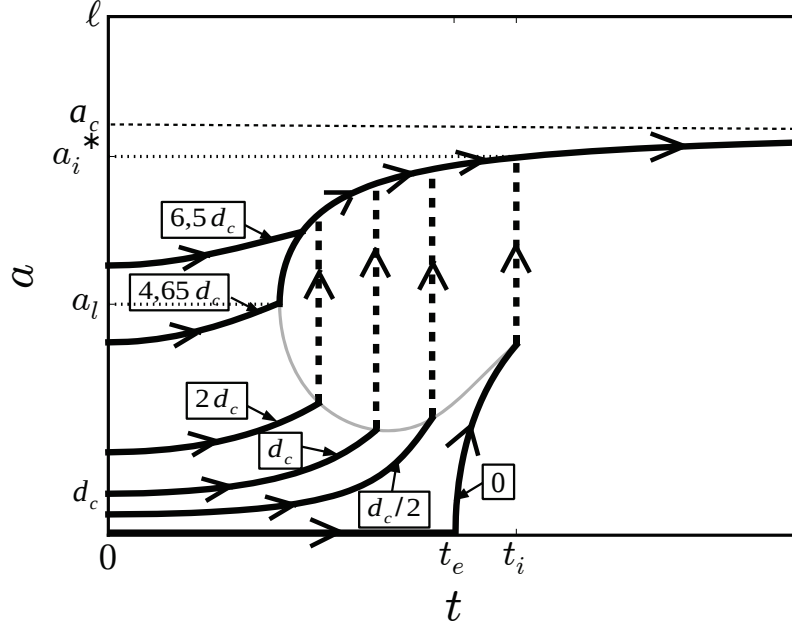


FIGURE 2.16 – Évolution de la longueur de fissure a sous un chargement croissant monotonement pour différentes valeurs a_0 de la fissure non-cohésive centrée initiale. Ici, $d_c/\ell = 0,1$ and $a_0 = 0; d_c/2; d_c; 2d_c; 4,65 d_c; 6,5 d_c$.

2.5.1 La loi cohésive de type Barenblatt

Dans ce modèle, la contrainte normale σ_{nn} correspondant à l'interaction entre les lèvres de fissure dépend de manière non-triviale du saut de déplacement, tandis que le modèle de Dugdale suppose que cette quantité est constante le long de la zone cohésive. Concrètement, en supposant que la fissure est toujours en mode I, *i.e.* seulement le déplacement normal est discontinu, la contrainte normale est une fonction décroissante monotonement du saut de déplacement normal lorsque $0 < \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c$ et s'annule dès que $\llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c$

$$\sigma_{nn} \begin{cases} \leq \sigma_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket = 0 \\ = \sigma_c(1 - \mathbf{f}(\llbracket u_n \rrbracket)) & \text{si } 0 < \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c \\ = 0 & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c \end{cases} \quad (2.75)$$

Dans cette formulation, \mathbf{f} est une fonction positive, croissante monotonement de $\llbracket u_2 \rrbracket$. Cette fonction est égale à 0 correspondant à $\llbracket u_n \rrbracket = 0$ et égale à 1 lorsque $\llbracket u_2 \rrbracket \geq \delta_c$

$$\mathbf{f}(0) = 0, \quad \mathbf{f}(\llbracket u_n \rrbracket) = 1 \quad \forall \llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c, \quad \mathbf{f}'(\llbracket u_n \rrbracket) \geq 0 \quad \forall \llbracket u_n \rrbracket \geq 0 \quad (2.76)$$

En conséquence, la densité d'énergie surfacique peut s'écrire sous la forme suivante

$$\Phi(\llbracket u_n \rrbracket) = \begin{cases} \infty+ & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket < 0 \\ \sigma_c \left[\llbracket u_n \rrbracket - \int_0^{\llbracket u_n \rrbracket} \mathbf{f}(s) ds \right] & \text{si } 0 \leq \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c \\ G_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c \end{cases} \quad (2.77)$$

La relation entre la contrainte critique cohésive σ_c et la valeur critique du taux de restitution d'énergie s'écrit sous la forme

$$G_c = \sigma_c \left[\delta_c - \int_0^{\delta_c} \mathbf{f}(s) ds \right]$$

La densité d'énergie surfacique et la contrainte cohésive dans le modèle cohésif de Barenblatt sont visualisées dans la figure 2.17. La fissure contient ainsi en général deux zones : *zone cohésive* dans laquelle la contrainte cohésive est égale à $\sigma_c(1 - \mathbf{f}(\llbracket u_n \rrbracket))$ et *zone non-cohésive* dans laquelle la contrainte cohésive s'annule.

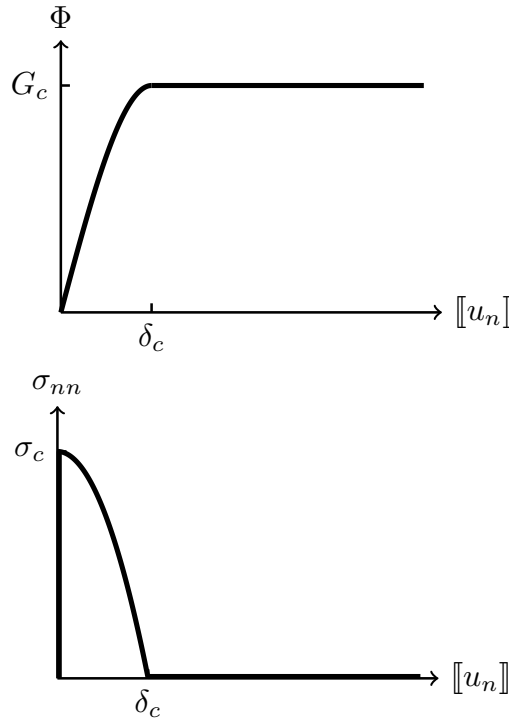


FIGURE 2.17 – Densité d'énergie surfacique et contrainte cohésive dans le modèle cohésif de Barenblatt

Sachant que les hypothèses de la structure et son comportement élastique, du chargement, de la symétrie et de la régularité sont les mêmes que dans les sous-sections 2.2.1-2.2.2, l'ensemble des états possibles de la fissure est également visualisé dans la figure 2.3 : sans fissure, fissure purement

cohésive et fissure partiellement non cohésive. La réponse élastique reste la même que dans le cas de Dugdale, en conséquence, la distribution de contrainte normale le long de Γ est donnée par (2.13) et l'équation (2.12) permet de calculer le temps t_e correspondant à la limite validité de la réponse élastique. Les hypothèses concernant la hiérarchie des longueurs, *i.e.* $d_c \ll L, \ell \lesssim L$, sont toujours valables, donc on peut utiliser l'approche à deux échelles afin d'étudier l'évolution de fissure purement cohésive de type Barenblatt. Les équations sont formulées dans le cas général de la loi cohésive de type Barenblatt, puis la méthode semi-analytique utilisant le développement en série des polynômes de Tchebychev est détaillée dans un cas particulier de la loi cohésive linéaire.

2.5.2 Formulation des calculs avec l'approche à deux échelles du cas général de la loi cohésive de type Barenblatt

2.5.2.1 Fissure purement cohésive

Considérons une fissure purement cohésive de longueur $2a > 0$ à l'instant $t > 0$. Pour a et t donnés, on définit les champs associés de déplacement et de contrainte comme la solution *unique*, dénotée par $(\mathbf{u}[t, a], \boldsymbol{\sigma}[t, a])$, du problème élastique linéaire posé sur la structure fissurée soumise à la contrainte cohésive *non-uniforme* de type Barenblatt sur les lèvres de la fissure

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}[t, a] = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a] = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}[t, a])) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}[t, a]) & \text{dans } \Omega \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \mathbf{u}[t, a] = t\mathbf{U} & \text{sur } \partial_D \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a] \mathbf{n} = t\mathbf{F} & \text{sur } \partial_N \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}[t, a] \mathbf{e}_2 = \sigma_c (1 - \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1))) \mathbf{e}_2 & \text{sur } [-a, a] \times \{0\} \end{cases} \quad (2.78)$$

De même manière que les calculs précédents de la fissure de type Dugdale, introduisons dans (2.78) les différences entre la solution avec la fissure purement cohésive et la solution élastique, *i.e.*

$$\bar{\mathbf{u}}[t, a] = \mathbf{u}[t, a] - t\mathbf{u}^{\text{el}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a] = \boldsymbol{\sigma}[t, a] - t\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}$$

La différence de champ de contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a](\mathbf{x})$ devrait tendre vers 0 lors que $\|\mathbf{x}\|$ devient grand devant a . Par ailleurs, sur les lèvres de la fissure, la différence de contrainte normale vérifie la condition $\bar{\sigma}[t, a]_{22}(x_1) = \sigma_c (1 - \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1))) - t\Sigma(x_1)$ où $\Sigma(x_1)$ est donné par (2.13). Par conséquent, on obtient

$$\bar{\sigma}[t, a]_{22}(x_1) = \left(1 - \frac{t}{t_e}\right) \sigma_c - \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) \sigma_c + 2 \frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2} \sigma_c + o(x_1^2), \quad |x_1| < a$$

La simplification d'une distribution de contrainte normale jusqu'au 2e ordre de x_1 nous permet d'écrire le problème concernant les champs de différences $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}})$ dans un voisinage de l'origine comme suit

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a] = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a] = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a])) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a]) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a](\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0} & \text{lorsque } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a](x_1, 0) \mathbf{e}_2 = \left(1 - \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) - \frac{t}{t_e} + 2 \frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2}\right) \sigma_c \mathbf{e}_2 & \text{lorsque } x_1 \in (-a, a) \end{cases} \quad (2.79)$$

Chapitre 2. Effets du champ de contrainte non-uniforme

Ce problème peut toujours être traité avec la méthode des potentiels complexes développée par [Muskhelishvili, 1963] dont les ingrédients sont rappelés dans l'annexe 2.A. Dans ce cas concret, la méthode est appliquée pour la contrainte normale suivante

$$\mathbb{T}(x_1) = \left(1 - \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) - \frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2}\right) \sigma_c \quad (2.80)$$

Le facteur d'intensité de contrainte en pointe de la fissure cohésive s'écrit comme suit grâce aux calculs d'intégrale (2.116)

$$\mathbb{K}_I[t, a] = \sigma_c \sqrt{\pi a} \left(\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2}\right) \frac{t}{t_e} - 1 \right) + \frac{\sigma_c}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(s)) \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds$$

La condition $\mathbb{K}_I[t, a] = 0$ nous donne une relation implicite entre le temps t , la mi-longueur et l'ouverture de la fissure purement cohésive

$$\pi a \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2}\right) \frac{t}{t_e}\right) = \int_{-a}^a \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(s)) \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds \quad (2.81)$$

Cette relation est valable pendant la phase où l'ouverture de la fissure à $x_1 = 0$ est encore inférieure à δ_c . Afin d'étudier l'ouverture de la fissure, il faudrait considérer le saut du potentiel complexe $\varphi(z)$ à travers la fissure cohésive. En injectant la distribution de la contrainte normale (2.80) dans l'intégrale (2.114), l'expression de la dérivée du potentiel complexe s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) + \frac{\sigma_c}{2} \frac{t}{t_e} \left(-\frac{2z\sqrt{z^2 - a^2}}{\ell^2} + \frac{2z^2}{\ell^2} - \frac{a^2 z}{\ell^2 \sqrt{z^2 - a^2}} \right) \\ &\quad - \sigma_c \frac{\chi(z)}{2i\pi} \int_{S_{\mathbf{u}}} \frac{\mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(\zeta))}{\chi(\zeta^+)(\zeta - z)} d\zeta \end{aligned} \quad (2.82)$$

Dans cette formulation, $S_{\mathbf{u}} = [-a, a] \times \{0\}$ dénote l'ensemble des points de discontinuité du champ de déplacement \mathbf{u} et χ signifie la fonction complexe suivante définie sur $\mathbb{C} \setminus S_{\mathbf{u}}$

$$\chi := \begin{cases} \mathbb{C} \setminus S_{\mathbf{u}} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \chi(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \end{cases} \quad (2.83)$$

A partir de (2.82), en considérant la différence entre $\varphi'(z^{\pm})$ associées à deux points sur les lèvres supérieure et inférieure de la fissure, on en déduit le saut de la dérivée du potentiel complexe à travers la fissure

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket'(x_1) &= -\sigma_c \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} + \sigma_c \frac{t}{t_e} \mathbf{i} \frac{x_1(2x_1^2 - a^2)}{\ell^2 \sqrt{a^2 - x_1^2}} \\ &\quad + \sigma_c \frac{\mathbf{i}}{\pi \sqrt{a^2 - x_1^2}} \int_{-a}^a \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(s)) \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{s - x_1} ds \end{aligned}$$

2.5. Généralisation du problème avec la loi cohésive de type Barenblatt

En utilisant la relation entre le saut du potentiel complexe et le saut du déplacement normal donnée dans l'annexe 2.A, cela induit que

$$\begin{aligned} \llbracket u(t)_2 \rrbracket'(x_1) = & -4(1-\nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \\ & + 4(1-\nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \frac{t}{t_e} \frac{x_1(2x_1^2 - a^2)}{\ell^2 \sqrt{a^2 - x_1^2}} \\ & + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi \sqrt{a^2 - x_1^2}} \frac{\sigma_c}{E} \int_{-a}^a \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(s)) \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{s - x_1} ds \end{aligned} \quad (2.84)$$

Notre objectif est de trouver les formulations de la longueur $a(t)$ et l'ouverture $\llbracket u(t)_2 \rrbracket$ le long de la fissure purement cohésive correspondant au chargement t en résolvant les deux équations intégrales (2.81) et (2.84).

2.5.2.2 Fissure partiellement non-cohésive

On étudie maintenant le cas d'une fissure de type Barenblatt partiellement non cohésive à l'instant t . La longueur de la zone non cohésive est $2b$ et les pointes des zones cohésives se situent à $\pm a$. Correspondant à (t, a, b) donnés pour $0 < b < a$ et $t > 0$, on définit les champs de déplacement et de contrainte associés comme la solution unique, dénoté par $(\mathbf{u}[t, a, b], \boldsymbol{\sigma}[t, a, b])$, du problème élastique linéaire sur la structure soumise à la contrainte cohésive non-uniforme sur les lèvres de fissure. En utilisant la même technique de perturbation du cas de la fissure purement cohésive, on considère le problème suivant concernant les champs de différences dans un voisinage de l'origine \mathbf{O}

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b] = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b] = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a, b])) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}[t, a, b]) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b](\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0} & \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}[t, a, b](x_1, 0) \mathbf{e}_2 = \mathbf{T}(x_1) \mathbf{e}_2 & \text{sur } (-a, a) \times \{0\} \end{cases} \quad (2.85)$$

où

$$\mathbf{T}(x_1) = \begin{cases} \left(-\frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2} \right) \sigma_c & \text{si } |x_1| < b \\ \left(1 - \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) - \frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{\ell^2} \right) \sigma_c & \text{si } b < |x_1| < a \end{cases} \quad (2.86)$$

Pour un instant $t > 0$ donné, la solution appartient à la branche partiellement non-cohésive seulement si a et b satisfont les deux conditions suivantes (voir Propositions 5-6)

$$\begin{cases} \mathbf{K}_I[t, a, b] = 0 \\ \llbracket u[t, a, b]_2 \rrbracket(b) = \delta_c \end{cases}$$

Chapitre 2. Effets du champ de contrainte non-uniforme

En injectant la distribution de contrainte normale (2.86) dans le calcul du facteur d'intensité de contrainte (2.116) présenté dans l'annexe 2.A, on obtient

$$\begin{aligned} K_I[t, a, b] = & \sigma_c \sqrt{\pi a} \left(\left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) \frac{t}{t_e} - 1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{b}{a} \right) \\ & + \frac{\sigma_c}{\sqrt{\pi a}} \left(\int_{-a}^a \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(s)) \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds - \int_{-b}^b \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(s)) \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

La condition $K_I[t, a, b] = 0$ nous donne une première relation implicite entre (a, b, t) comme suit

$$\pi a \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{b}{a} - \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) \frac{t}{t_e} \right) = \int_{-a}^a \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds - \int_{-b}^b \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds \quad (2.88)$$

Afin de calculer le saut normal de déplacement $\llbracket u[t, a, b] \rrbracket$, on devrait calculer le saut du potentiel complexe $\varphi(z)$ à travers les zones cohésives, *i.e.* $\llbracket \varphi \rrbracket(x_1)$ pour $b < |x_1|$. En utilisant la distribution de contrainte normale (2.86) et la procédure de calculs présentée dans l'annexe 2.A, on écrit directement l'expression (implicite) de $\llbracket \varphi \rrbracket'(x_1)$ sans rendre le détail des intégrales intermédiaires

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket'(x_1) = & -\frac{i\sigma_c x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \left(\frac{t}{t_e} \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{b}{a} \right) \\ & - 2i\sigma_c \left(\frac{x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2}}{\ell^2} \frac{t}{t_e} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctanh} \left(\frac{b \sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1 \sqrt{a^2 - b^2}} \right) \right) \\ & + \frac{i\sigma_c}{\pi \sqrt{a^2 - x_1^2}} \left(\int_{-a}^a \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{s - x_1} ds - \int_{-b}^b \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{s - x_1} ds \right) \end{aligned} \quad (2.89)$$

Finalement, en utilisant la relation entre le saut normal de déplacement et le saut du potentiel complexe donnée par (2.117), on obtient une équation intégral-différentielle sur $u(t)_2$ comme suit

$$\begin{aligned} \llbracket u(t)_2 \rrbracket'(x_1) = & -\frac{4(1 - \nu^2)\sigma_c x_1}{E \sqrt{a^2 - x_1^2}} \left(\frac{t}{t_e} \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{b}{a} \right) \\ & - 8(1 - \nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \left(\frac{x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2}}{\ell^2} \frac{t}{t_e} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctanh} \left(\frac{b \sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1 \sqrt{a^2 - b^2}} \right) \right) \\ & + \frac{4(1 - \nu^2)\sigma_c}{\pi E \sqrt{a^2 - x_1^2}} \left(\int_{-a}^a \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{s - x_1} ds - \int_{-b}^b \mathbf{f}(\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1)) \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{s - x_1} ds \right) \end{aligned} \quad (2.90)$$

La résolution semi-analytique est considérée dans le cas le plus simple de la loi cohésive de type Barenblatt : la loi cohésive linéaire.

2.5.3 Cas particulier de la loi cohésive linéaire de type Barenblatt

Pour cette loi, la contrainte cohésive est une fonction linéaire décroissante du saut de déplacement normal lorsque $0 < \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c$ et s'annule lorsque $\llbracket u_n \rrbracket \geq 0$

$$\sigma_{nn} \begin{cases} \leq \sigma_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket = 0 \\ = \sigma_c \left(1 - \frac{\llbracket u_n \rrbracket}{\delta_c}\right) & \text{si } 0 < \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c \\ = 0 & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket > \delta_c \end{cases}$$

En conséquence, la densité d'énergie surfacique est une fonction d'ordre 2 du saut de déplacement normal

$$\Phi(\llbracket u_n \rrbracket) = \begin{cases} \infty+ & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket < 0 \\ \sigma_c \llbracket u_n \rrbracket \left(1 - \frac{\llbracket u_n \rrbracket}{2\delta_c}\right) & \text{si } 0 \leq \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c \\ G_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c \end{cases}$$

Dans ce cas concret, la relation entre la contrainte critique σ_c et la valeur critique du taux de restitution d'énergie se réduit à $G_c = \frac{\sigma_c \delta_c}{2}$. En utilisant cette loi cohésive linéaire, on présente à cette étape une méthode semi-analytique pour étudier l'évolution de la fissure cohésive de type Barenblatt dans les phases purement cohésive et partiellement non-cohésive.

2.5.3.1 Fissure purement cohésive

La relation (2.81) devient

$$\pi a \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2}\right) \frac{t}{t_e}\right) = \int_{-a}^a \frac{\llbracket u(t)_2 \rrbracket(s)}{\delta_c} \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds \quad (2.91)$$

L'expression de la dérivée du saut de déplacement (2.84) se réécrit comme suit

$$\begin{aligned} \llbracket u(t)_2 \rrbracket'(x_1) = & -4(1-\nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \frac{t}{t_e} \left(1 - \frac{t_e}{t}\right) \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \\ & + 4(1-\nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \frac{t}{t_e} \frac{x_1(2x_1^2 - a^2)}{\ell^2 \sqrt{a^2 - x_1^2}} \\ & + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi \sqrt{a^2 - x_1^2}} \frac{\sigma_c}{E} \int_{-a}^a \frac{\llbracket u(t)_2 \rrbracket(s)}{\delta_c} \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{s - x_1} ds \end{aligned} \quad (2.92)$$

La longueur $a(t)$ et le saut de déplacement normal $\llbracket u(t)_2 \rrbracket$ sont solutions du système des deux équations intégrales-différentielles (2.91) et (2.92) dans le cas de la loi cohésive linéaire de type Barenblatt. Du fait que la résolution analytique du système des équations intégrales-différentielles n'est disponible, on présente dans cette sous-section une méthode semi-analytique pour résoudre le problème de l'évolution de la fissure purement cohésive de type Barenblatt. Introduisons tout d'abord la coordonnée et le saut de déplacement normal adimensionnées comme suit

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{a} \in [-1, 1], \quad \bar{\delta}_t = \frac{\llbracket u(t)_2 \rrbracket}{\frac{a^3}{d_c \ell^2} \frac{t}{t_e} \delta_c} \quad (2.93)$$

Utilisant ces grandeurs adimensionnées, (2.91) devient

$$\pi \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) \frac{t}{t_e} \right) = \frac{a^3}{d_c \ell^2} \frac{t}{t_e} \int_{-1}^1 \bar{\delta}_t(\tilde{s}) \sqrt{\frac{1+\tilde{s}}{1-\tilde{s}}} d\tilde{s}$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme plus compacte suivante

$$\pi \left(1 - \frac{\ell^2}{a^2} \left(1 - \frac{t_e}{t} \right) \right) = \frac{a}{d_c} \int_{-1}^1 \bar{\delta}_t(\tilde{s}) \sqrt{\frac{1+\tilde{s}}{1-\tilde{s}}} d\tilde{s} \quad (2.94)$$

En injectant les grandeurs adimensionnées et la longueur d_c introduite dans (2.11), la forme adimensionnée de l'équation intégral-différentielle (2.92) s'exprime comme suit

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \bar{\delta}'_t(\tilde{x}_1) &= \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{1-\tilde{x}_1^2}} \left[-\frac{\ell^2}{a^2} \left(1 - \frac{t_e}{t} \right) + (2\tilde{x}_1^2 - 1) \right] \\ &+ \frac{1}{\pi \sqrt{1-\tilde{x}_1^2}} \frac{a}{d_c} \int_{-1}^1 \bar{\delta}_t(\tilde{s}) \frac{\sqrt{1-\tilde{s}^2}}{\tilde{s} - \tilde{x}_1} d\tilde{s} \end{aligned} \quad (2.95)$$

On cherche la solution du saut de déplacement normal adimensionné $\bar{\delta}_t(\tilde{x}_1)$ sous la forme d'une série des polynômes de Tchebychev à la seconde espèce, en sachant que $\bar{\delta}_t(\tilde{x}_1)$ est une fonction paire suite à la symétrie et en prenant en compte les conditions aux limites $\bar{\delta}_t(\pm 1) = 0$, *i.e.*

$$\bar{\delta}_t(\tilde{x}_1) = \sum_{p=1}^N a_{2p}^t (U_{2p}(\tilde{x}_1) - (2p+1)) \quad (2.96)$$

Dans cette formulation, (a_{2p}^t) sont les paramètres du développement à identifier et $U_{2p}(\tilde{x}_1)$ désigne le polynôme de Tchebychev à la seconde espèce d'ordre $2p$. En injectant (2.96) dans (2.95), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^N a_{2p}^t U'_{2p}(\tilde{x}_1) &= \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{1-\tilde{x}_1^2}} \left[-\frac{\ell^2}{a^2} \left(1 - \frac{t_e}{t} \right) + (2\tilde{x}_1^2 - 1) \right] \\ &+ \frac{1}{\pi \sqrt{1-\tilde{x}_1^2}} \frac{a}{d_c} \sum_{p=1}^N a_{2p}^t \int_{-1}^1 (U_{2p}(\tilde{x}_1) - (2p+1)) \frac{\sqrt{1-\tilde{s}^2}}{\tilde{s} - \tilde{x}_1} d\tilde{s} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Les propriétés des polynômes de Tchebychev nous donne

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^N a_{2p}^t U'_{2p}(\tilde{x}_1) &= \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{1-\tilde{x}_1^2}} \left[-\frac{\ell^2}{a^2} \left(1 - \frac{t_e}{t} \right) + (2\tilde{x}_1^2 - 1) \right] \\ &- \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}_1^2}} \frac{a}{d_c} \sum_{p=1}^N a_{2p}^t (T_{2p+1}(\tilde{x}_1) - (2p+1)\tilde{x}_1) \end{aligned} \quad (2.98)$$

où $T_{2p+1}(\tilde{x}_1)$ désigne le polynôme de Tchebychev à la première espèce d'ordre $2p+1$. (2.98) est équation linéaire de p paramètres (a_{2p}^t) . En multipliant cette équation par $T_j(\tilde{x}_1)$ pour $j =$

1, 2, ..., M et l'intégrant sur l'intervalle $[-1, 1]$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^N a_{2p}^t \int_{-1}^1 U'_{2p}(\tilde{x}_1) T_j(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 &= \int_{-1}^1 \left[-\frac{\ell^2}{a^2} \left(1 - \frac{t_e}{t} \right) + (2\tilde{x}_1^2 - 1) \right] \frac{\tilde{x}_1 T_j(\tilde{x}_1)}{\sqrt{1 - \tilde{x}_1^2}} d\tilde{x}_1 \\ &\quad - \frac{a}{d_c} \sum_{p=1}^N a_{2p}^t \int_{-1}^1 \frac{T_{2p+1}(\tilde{x}_1) T_j(\tilde{x}_1)}{\sqrt{1 - \tilde{x}_1^2}} d\tilde{x}_1 \\ &\quad + \frac{a}{d_c} \sum_{p=1}^N (2p+1) a_{2p}^t \int_{-1}^1 \frac{\tilde{x}_1 T_j(\tilde{x}_1)}{\sqrt{1 - \tilde{x}_1^2}} d\tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (2.99)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme matricielle suivante

$$[\mathbf{F}_j] = ([\mathbf{C}_{jp}] + [\mathbf{D}_{jp}] - [\mathbf{E}_{jp}]) [a_{2p}^t] \quad (2.100)$$

où les composantes de quatre matrices $[\mathbf{F}_j], [\mathbf{C}_{jp}], [\mathbf{D}_{jp}], [\mathbf{E}_{jp}]$ s'expriment à partir de (2.99)

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j &= \int_{-1}^1 \left[-\frac{\ell^2}{a^2} \left(1 - \frac{t_e}{t} \right) + (2\tilde{x}_1^2 - 1) \right] \frac{\tilde{x}_1 T_j(\tilde{x}_1)}{\sqrt{1 - \tilde{x}_1^2}} d\tilde{x}_1 \\ \mathbf{D}_{jp} &= \frac{a}{d_c} \int_{-1}^1 \frac{T_{2p+1}(\tilde{x}_1) T_j(\tilde{x}_1)}{\sqrt{1 - \tilde{x}_1^2}} d\tilde{x}_1 \\ \mathbf{E}_{jp} &= \frac{a}{d_c} (2p+1) \int_{-1}^1 \frac{\tilde{x}_1 T_j(\tilde{x}_1)}{\sqrt{1 - \tilde{x}_1^2}} d\tilde{x}_1 \\ \mathbf{C}_{jp} &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U'_{2p}(\tilde{x}_1) T_j(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 \end{cases} \quad (2.101)$$

Afin de calculer ces matrices, on utilise les intégrales suivantes des polynômes de Tchebychev

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x_1) T_j(x_1)}{\sqrt{1 - x_1^2}} dx_1 = \frac{\pi}{2} \delta_{ij} \quad (2.102)$$

Dans ces formulations, (δ_{ij}) désignent les symboles de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ainsi, on obtient les formulations explicites des composantes de trois premières matrices (2.101)

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \delta_{j3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\ell^2}{a^2} \left(1 - \frac{t_e}{t} \right) \right) \delta_{j1} \right] \\ \mathbf{D}_{jp} &= \frac{\pi a}{2d_c} \delta_{j(2p+1)} \\ \mathbf{E}_{jp} &= \frac{\pi a}{2d_c} (2p+1) \delta_{j1} \end{cases}$$

Pour la matrice $[\mathbf{C}_{jp}]$, on réécrit le polynôme impair $U'_{2p}(x_1)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des polynômes à la première espèce de Tchebychev d'ordres impaires $(T_1(x_1), T_3(x_1), \dots, T_{2p-1}(x_1))$ comme suit

$$U'_{2p}(x_1) = \gamma_{2p}^1 T_1(x_1) + \gamma_{2p}^3 T_3(x_3) + \dots + \gamma_{2p}^{2p-1} T_{2p-1}(x_1) = \sum_{i=1}^p \gamma_{2p}^{2i-1} T_{2i-1}(x_1)$$

où γ_{2p}^i désigne la constante associée à l' i -ème terme dans la combinaison linéaire de U'_{2p} . D'où la matrice $[\mathbf{C}_{jp}]$ peut s'exprimer comme un produit matriciel

$$[\mathbf{C}_{jp}] = \frac{2}{\pi} [\mathbf{T}_{ji}] \cdot [\mathbf{K}_{ip}] \quad (2.103)$$

où

$$\mathbf{T}_{ji} = \int_{-1}^1 T_j(x_1) T_{2i-1}(x_1) dx_1, \quad \mathbf{K}_{ip} = \gamma_{2p}^{2i-1}$$

Application numérique. Afin d'avoir des résultats plus concrets pour faciliter la comparaison avec le cas de la loi cohésive de type Dugdale, la série des polynômes de Tchebychev (2.96) est tronquée en choisissant $N = 5$, ainsi $p \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Pour identifier les cinq paramètres (a_{2p}^t), on devrait choisir $M = 9$, ainsi $j \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Les quatre matrices dans (2.101) s'écrivent explicitement comme suit

$$[\mathbf{C}_{jp}] = \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} 5,33 & 9,60 & 13,71 & 17,78 & 21,82 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,20a & 5,94 & 11,28 & 15,93 & 20,33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,76 & -7,87 & 5,21 & 11,78 & 17,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,36 & -2,30 & -13,37 & 3,70 & 11,54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,21 & -1,19 & -4,39 & -19,45 & 1,60 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{D}_{jp}] = \frac{\pi a}{2d_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{E}_{jp}] = \frac{\pi a}{2d_c} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{F}_j] = \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\ell^2}{a^2} \left(1 - \frac{t_e}{t}\right) \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En injectant la formulation de la série des polynômes de Tchebychev tronquée dans (2.94), on obtient

$$1 - \frac{\ell^2}{a^2} \left(1 - \frac{t_e}{t}\right) = -\frac{a}{d_c} (2a_2^t + 4a_4^t + 6a_6^t + 8a_8^t + 10a_{10}^t)$$

2.5. Généralisation du problème avec la loi cohésive de type Barenblatt

En utilisant cette relation et introduisant un paramètre sans dimension $\lambda := \frac{\pi^2}{4} \frac{a}{d_c}$ qui est proportionnel à la longueur de la fissure a , le système des équations linéaires sur les paramètres (a_{2p}^t) peut s'écrire sous la forme matricielle explicite suivante

$$\begin{bmatrix} 5,33 - \lambda & 9,60 - \lambda & 13,71 - \lambda & 17,78 - \lambda & 21,82 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,20 + \lambda & 5,94 & 11,28 & 15,93 & 20,33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,76 & -7,87 + \lambda & 5,21 & 11,78 & 17,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,36 & -2,30 & -13,37 + \lambda & 3,70 & 11,54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,21 & -1,19 & -4,39 & -19,45 + \lambda & 1,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_6 \\ a_8 \\ a_{10} \end{bmatrix} = \frac{\pi^2}{8} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

En conséquence, correspondant à chaque valeur de λ , ainsi à chaque valeur de la longueur de la fissure a , les paramètres (a_{2p}^t) sont identifiés grâce à (2.104). A partir du développement (2.96), cela déduit que l'expression du saut de déplacement adimensionné $\bar{\delta}_t$ dépend de la longueur de la fissure qui croît évidemment avec le chargement t . A cette étape, on réécrit des résultats obtenus dans le cas de la fissure de type Dugdale sous la forme adimensionnée et les compare avec la fissure de type Barenblatt correspondant aux différentes longueurs de fissure.

- *Cas de la fissure purement cohésive de type Dugdale.* En injectant les variables adimensionnées (2.93) dans l'expression du saut de déplacement normal de la fissure purement cohésive de Dugdale (2.30) et utilisant (2.27), le saut de déplacement normal adimensionné de cette fissure s'écrit tout simplement comme suit

$$\bar{\delta}_t(\tilde{x}_1) = \frac{\pi}{3} (1 - \tilde{x}_1^2)^{3/2} \quad (2.105)$$

Donc, la formulation du saut de déplacement normal adimensionné de la fissure purement cohésive de type Dugdale reste toujours la même lors de la propagation de la fissure. En particulier, cette grandeur est décroissante avec $|\tilde{x}_1|$, s'annule pour $\tilde{x}_1 = \pm 1$ et atteint sa valeur maximale $\pi/3$ à l'origine $\tilde{x}_1 = 0$. En particulier, la phase purement cohésive se termine lorsque le saut maximal de déplacement $[[u(t)_2]](0)$ atteint la valeur critique δ_c . En dénotant t_i le chargement correspondant à la limite de validité de la phase purement cohésive, à partir de (2.93) et sachant que $\bar{\delta}_t(0) = \pi/3$ pour toutes les valeurs de t , on a

$$\frac{\pi}{3} a^3(t_i) t_i = d_c \ell^2 t_e$$

- *Cas de la fissure purement cohésive de type Barenblatt de très petite longueur.* Ce cas correspond au début de l'évolution de la fissure purement cohésive, *i.e.* le temps t est très proche de t_e où la fissure s'initie au sein du domaine. Dans ce cas, la longueur de la fissure a est assez petite par rapport à la longueur caractéristique d_c liée au comportement du matériau, ainsi le paramètre λ est très petit devant l'unité. Par conséquent, les inconnues $(a_2^t, a_4^t, a_6^t, a_8^t, a_{10}^t)$ peuvent être calculées approximativement à partir du système linéaire (2.104) en remplaçant $\lambda \approx 0$. D'ailleurs, l'évolution de la fissure de type Barenblatt dans ce cas peut être approchée

par celle de type Dugdale. En effet, du fait que l'ouverture de la fissure purement cohésive de type Barenblatt est encore très proche de zéro, la contrainte cohésive le long de la fissure est quasiment uniforme et égale à la contrainte critique σ_c . Cette bonne approximation est affirmée par la figure 2.18.

- *Cas de la fissure purement cohésive de type Barenblatt de grande longueur.* Lorsque la longueur de la fissure a est à même ordre de grandeur où beaucoup plus grande que la longueur caractéristique d_c liée au comportement du matériau, *i.e.* $\lambda \gtrsim 1$, les inconnues (a_{2p}^t) devraient être calculées en remplaçant les valeurs concrètes de λ dans le système linéaire (2.104). Les courbes du saut de déplacement normal adimensionné correspondant aux différentes valeurs de λ sont montrées dans la figure 2.18. $\bar{\delta}_t(\tilde{x}_1)$ est une fonction décroissante de $|\tilde{x}_1|$, s'annule pour $\tilde{x}_1 = \pm 1$ et atteint sa valeur maximale, qui est toujours plus grande que $\pi/3$ du cas de Dugdale, à l'origine $\tilde{x}_1 = 0$. En particulier, la phase purement cohésive se termine lorsque le saut de déplacement $\llbracket u(t)_2 \rrbracket$ atteint la valeur critique δ_c . En dénotant t_i^* le chargement correspondant, à partir de (2.93) et sachant que la formulation du saut de déplacement adimensionné $\bar{\delta}_t(0)$ dépend du chargement, on a

$$\bar{\delta}_{t_i^*}(0)a^3(t_i^*)t_i^* = d_c \ell^2 t_e$$

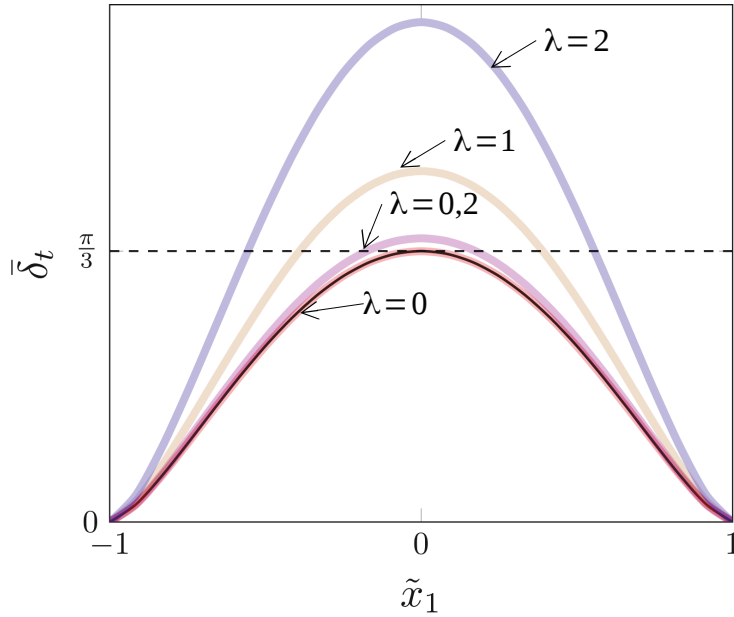


FIGURE 2.18 – Le saut de déplacement adimensionné de la fissure purement cohésive de type Barenblatt correspondant aux différentes valeurs de $\lambda = 0; 0, 2; 1; 2$ en comparant avec le cas de Dugdale (courbe noire)

2.5.3.2 Fissure partiellement non-cohésive

La première relation (2.88) entre deux longueurs de fissure (a, b) et le paramètre de chargement devient

$$\pi a \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{b}{a} - \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) \frac{t}{t_e} \right) = \int_{-a}^a \frac{[u(t)_2](s)}{\delta_c} \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds - \int_{-b}^b \frac{[u(t)_2](s)}{\delta_c} \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds \quad (2.106)$$

L'équation intégral-différentielle sur le saut normal de déplacement se réécrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} [u(t)_2]'(x_1) = & -\frac{4(1-\nu^2)\sigma_c x_1}{E\sqrt{a^2-x_1^2}} \left(\frac{t}{t_e} \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{b}{a} \right) \\ & -8(1-\nu^2) \frac{\sigma_c}{E} \left(\frac{x_1 \sqrt{a^2-x_1^2}}{\ell^2} \frac{t}{t_e} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctanh} \left(\frac{b\sqrt{a^2-x_1^2}}{x_1 \sqrt{a^2-b^2}} \right) \right) \\ & + \frac{4(1-\nu^2)\sigma_c}{\pi E \sqrt{a^2-x_1^2}} \left(\int_{-a}^a \frac{[u(t)_2](s)}{\delta_c} \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-x_1} ds - \int_{-b}^b \frac{[u(t)_2](s)}{\delta_c} \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-x_1} ds \right) \end{aligned} \quad (2.107)$$

En injectant les grandeurs adimensionnées données par (2.93) et posant $\alpha = \frac{b}{a} \in (0, 1)$, on peut exprimer (2.106) comme suit

$$\pi \left(\frac{2}{\pi} \arccos \alpha - \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) \frac{t}{t_e} \right) = \frac{a^3}{d_c \ell^2} \frac{t}{t_e} \left(\int_{-1}^1 \bar{\delta}_t(\tilde{s}) \sqrt{\frac{1+\tilde{s}}{1-\tilde{s}}} d\tilde{s} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \bar{\delta}_t(\tilde{s}) \sqrt{\frac{1+\tilde{s}}{1-\tilde{s}}} d\tilde{s} \right)$$

D'où on obtient l'équation suivante

$$\frac{\pi d_c}{a} \left(\frac{2}{\pi} \frac{\ell^2}{a^2} \frac{t_e}{t} \arccos \alpha + 1 - \frac{\ell^2}{a^2} \right) = \int_{-1}^1 \bar{\delta}_t(\tilde{s}) \sqrt{\frac{1+\tilde{s}}{1-\tilde{s}}} d\tilde{s} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \bar{\delta}_t(\tilde{s}) \sqrt{\frac{1+\tilde{s}}{1-\tilde{s}}} d\tilde{s} \quad (2.108)$$

On écrit également l'équation intégral-différentielle sous la forme adimensionnée

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \bar{\delta}_t'(\tilde{x}_1) = & \frac{2}{\pi} \frac{\ell^2}{a^2} \frac{t_e}{t} \arccos \alpha + 1 - \frac{\ell^2}{a^2} \\ & -2 \left(\tilde{x}_1 \sqrt{a^2-\tilde{x}_1^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\ell^2}{a^2} \frac{t_e}{t} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\alpha \sqrt{1-\tilde{x}_1^2}}{\tilde{x}_1 \sqrt{1-\alpha^2}} \right) \right) \\ & + \frac{a}{\pi d_c \sqrt{1-\tilde{x}_1^2}} \left(\int_{-1}^1 \bar{\delta}_t(\tilde{s}) \frac{\sqrt{1-\tilde{s}^2}}{\tilde{s}-\tilde{x}_1} d\tilde{s} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \bar{\delta}_t(\tilde{s}) \frac{\sqrt{1-\tilde{s}^2}}{\tilde{s}-\tilde{x}_1} d\tilde{s} \right) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Afin d'étudier l'évolution du saut de déplacement adimensionné étant la solution du système d'équations (2.108) et (2.109), on utilise la méthode semi-analytique se basant sur le développement de $\bar{\delta}_t(\tilde{x}_1)$ en série des polynômes de Tchebychev de seconde espèce. Les conditions de symétrie devraient toujours être respectées, ainsi $\bar{\delta}_t(\tilde{x}_1)$ peut toujours s'écrire sous la forme donnée par (2.96). En plus, la condition du saut aux pointes de la zone non cohésive $[u(t)_2](\pm b) = \delta_c$ nous donne une condition supplémentaire

$$\bar{\delta}_t(\alpha) = \frac{\ell^2 d_c}{a^3} \frac{t_e}{t} \quad (2.110)$$

Du fait que la présence de la zone non cohésive alourdit de manière importante des calculs, on considère $\bar{\delta}_t(\tilde{x}_1)$ sous la forme d'une série tronquée suivante

$$\bar{\delta}_t(\tilde{x}_1) = a_2^t(U_2(\tilde{x}_1) - 3) + a_4^t(U_4(\tilde{x}_1) - 5) + a_6^t(U_6(\tilde{x}_1) - 7)$$

En injectant cette série dans (2.108), après des calculs d'intégrales on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\pi d_c}{a} \left(\frac{2}{\pi} \frac{\ell^2}{a^2} \frac{t_e}{t} \arccos \alpha + 1 - \frac{\ell^2}{a^2} \right) &= -2(a_2^t + 2a_4^t + 3a_6^t) \left(\pi + 2 \arcsin \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \right) \\ &\quad + \sqrt{1-\alpha^2} \left(4a_2^t \alpha + 8a_4^t \alpha^3 + \frac{8}{3} a_6^t (8\alpha^5 - 5\alpha^3) \right) \end{aligned}$$

L'équation (2.110) nous donne une relation entre les coefficients (a_2^t, a_4^t, a_6^t) et (a, t) comme suit

$$a_2^t(U_2(\alpha) - 3) + a_4^t(U_4(\alpha) - 5) + a_6^t(U_6(\alpha) - 7) = \frac{\ell^2 d_c}{a^3} \frac{t_e}{t}$$

2.6 Conclusion du chapitre

On résume les résultats principaux obtenus dans ce chapitre. D'une part, la nucléation et la propagation de la fissure cohésive de type Dugdale sont étudiées en prenant en compte le champ de contrainte non-uniforme dans un voisinage du point où la fissure est initiée. La présence d'une contrainte critique σ_c dans le modèle de Dugdale permet d'expliquer le phénomène de nucléation de fissure correspondant à un chargement fini t_e , qui est une des lacunes importantes du modèle classique de Griffith. Néanmoins, seulement dans la première phase purement cohésive, dans laquelle toute la fissure est soumise à des forces cohésives, l'évolution de fissure est progressive et ainsi la longueur de la fissure est une fonction continue croissante du chargement. Dès que le saut maximal de déplacement atteint la valeur critique δ_c , l'évolution de fissure devrait être discontinue et cela conduit à un saut de la longueur de fissure suite à la présence d'un snap-back sur la branche d'évolution. En plus, les effets d'échelles sont possibles grâce à la longueur caractéristique du matériau d_c du modèle de Dugdale et la longueur caractéristique ℓ du gradient de contrainte. Dans le cas pratique où les longueurs caractéristiques sont très petites par rapport aux dimensions du domaine, le problème d'évolution de fissure peut être traité analytiquement par la technique à deux échelles. En particulier, la réponse est très sensitive au rapport ϵ entre la longueur caractéristique d_c du matériau et la longueur caractéristique ℓ du gradient de contrainte. Plus ϵ est petit, plus la première phase purement cohésive est courte et plus le saut de longueur de fissure à l'instant t_i de l'initiation de la zone non-cohésive est grand. Le snap-back sur la branche partiellement non-cohésive joue un rôle important lors de l'étude des effets du défaut pré-existant. De plus, la longueur de la fissure tend asymptotique vers une valeur de même ordre que ℓ lorsque le chargement tend vers l'infini. Cette valeur asymptotique dépend de la formulation de distribution de contrainte dans le voisinage du point d'initiation de fissure. On considère ainsi dans ce chapitre les cas particuliers des distributions quadratique et d'ordre 4 de contrainte et le cas général de la distribution sous la forme d'une série.

D'autre part, des résultats utilisant la loi cohésive de Dugdale sont généralisés pour le modèle cohésif de type Barenblatt. L'approche à deux échelle et l'analyse complexe sont toujours

utilisées, mais la résolution du problème conduit à un système d'équations intégral-différentielles dont les solutions analytiques ne sont pas disponibles. En conséquence, on présente la méthode semi-analytique avec la série des polynômes de Tchebychev. Le saut de déplacement normal adimensionné correspondant aux différentes longueurs de fissure purement cohésive de type Barenblatt peut être étudié approximativement et comparé à la fissure purement cohésive de type Dugdale.

2.A Le problème local général et sa résolution par l'analyse complexe

Considérons le problème élastique plane suivant dans le plan \mathbb{R}^2 privé d'une fissure de longueur $2a$ centrée à l'origine dans la direction x_1

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus ([-a, a] \times \{0\}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0} & \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \\ \boldsymbol{\sigma}(x_1, 0) \mathbf{e}_2 = \mathbf{T}(x_1) \mathbf{e}_2 & \text{lorsque } x_1 \in (-a, a) \end{cases} \quad (2.111)$$

où $\mathbf{T}(x_1)$ signifie la distribution de la force normale sur les lèvres de la fissure. En utilisant les potentiels complexes, la solution à un déplacement de corps rigide près est présenté dans [Muskhelishvili, 1963]. En effet, les composantes du champ de déplacement et de contrainte sont données par les combinaisons des potentiels complexes $(\varphi(z), \psi(z))$ où la variable complexe $z = x_1 + ix_2$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) - i\sigma_{12}(x_1, x_2) = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \quad (2.112)$$

$$2\mu(u_1(x_1, x_2) + iu_2(x_1, x_2)) = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (2.113)$$

Dans ces formulations, (λ, μ) signifient les deux coefficients de Lamé du comportement élastique du matériau, (φ, ψ) sont holomorphes dans le plan privé de la fissure, la barre signifie la conjugaison complexe. Sans rendre dans les détails des calculs complexes, on obtient l'expression de la dérivée du potentiel complexe φ

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\mathbf{T}(s)\sqrt{a^2 - s^2}}{s - z} ds, \quad (2.114)$$

Cela déduit la distribution de la contrainte le long de l'axe $x_2 = 0$ hors de la fissure

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{1}{\pi\sqrt{x_1^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\mathbf{T}(s)\sqrt{a^2 - s^2}}{s - x_1} ds \quad \text{pour } |x_1| > a. \quad (2.115)$$

Rappelons que dans le modèle classique de la mécanique de la rupture, la contrainte normale est singulière en pointes de la fissure avec la singularité du type $\sigma_{22}(a + r, 0) \sim K_I/\sqrt{2\pi r}$ pour r proche de 0, où K_I signifie le facteur d'intensité de contrainte en mode en pointes de la fissure. D'ailleurs, la relation entre K_I et la répartition de contrainte normale \mathbf{T} s'écrit comme suit

$$K_I = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \mathbf{T}(s) \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds. \quad (2.116)$$

En intégrant (2.114), on obtient la relation entre le saut de déplacement normal à travers la fissure et le saut du potentiel complexe φ (le déplacement arbitraire du corps rigide ne joue aucun rôle)

$$[[u_2]](x_1) = \frac{4(1 - \nu^2)}{iE} [[\varphi]](x_1). \quad (2.117)$$

Chapitre 3

Mise en œuvre numérique dans *Code_Aster*

Sommaire

3.1	Introduction des modèles numériques	100
3.1.1	Méthode de Lagrangien augmenté pour les éléments cohésifs d'interface	100
3.1.2	Méthode du pilotage du chargement	103
3.2	Initiation et propagation de fissure cohésive en mode mixte	104
3.2.1	Post-traitement - Critère d'amorçage cohésif multidimensionnel	104
3.2.2	Propagation de fissure cohésive en mode mixte au sein du matériau élastique	110
3.3	Effets de la contrainte non-uniforme	118
3.3.1	Branche élastique	120
3.3.2	Branche purement cohésive	121
3.3.3	Branche partiellement non cohésive	123
3.4	Conclusion du chapitre	123

Objectifs du chapitre

Après deux chapitres principalement analytiques, ce chapitre est consacré aux études d'initiation et de propagation de fissure à travers des simulations numériques dans *Code_Aster*. La première partie du chapitre a pour but l'implémentation du modèle de zone cohésive en mode mixte dans *Code_Aster* pour les études numériques d'initiation et de propagation de fissure. D'une part, le critère d'initiation de fissure utilisant la courbe cohésive intrinsèque est mis en place dans le post-traitement élastoplastique afin d'identifier la position du site d'amorçage et la direction potentielle de la fissure cohésive au sein des structures multidimensionnelles. En particulier, en comparant les résultats de simulations numériques avec des essais expérimentaux sur les éprouvettes axisymétriques entaillées (AE) de différentes tailles, les effets de structure et de triaxialité du champ de contrainte sont mis en discussion. D'autre part, se basant sur

des résultats concernant les éléments finis d'interface cohésifs présentés dans [Lorentz, 2008], la propagation de fissure cohésive en mode mixte est généralisée dans le cadre d'une loi cohésive contenant deux contraintes critiques distinguées (σ_c, τ_c). Les formulations de Lagrangien augmenté sont détaillées et implémentées dans *Code_Aster*. Ce type d'éléments d'interface est mis en place dans la simulation numérique d'arrachement en cisaillement pur. La partie suivante du chapitre est consacré à valider des résultats analytiques dans le chapitre 2 concernant les effets de la contrainte non-uniforme sur l'évolution de la fissure. Dans cette simulation, une structure symétrique bidimensionnelle de comportement purement élastique est soumise à un chargement non-uniforme sur son bord pour que fissure s'initie et se propagation sur la ligne de symétrie de la structure. Les évolutions de la longueur et de l'ouverture de fissure en fonction du temps sont considérées numériquement et mises en comparaison avec les solutions analytiques.

3.1 Introduction des modèles numériques

3.1.1 Méthode de Lagrangien augmenté pour les éléments cohésifs d'interface

Les éléments cohésifs d'interface consistent à une couche d'éléments finis insérés le long de la fissure potentielle qui permet de modéliser la discontinuité du champ de déplacement. La loi de comportement mécanique volumique de la structure hors de cette couche d'éléments est supposée indépendante de la présence de la fissure. L'implémentation de la technique d'éléments cohésifs d'interface dans les simulations d'évolution de fissure présente des avantages importants. D'une part, l'approche variationnelle du modèle de zone cohésive avec deux paramètres supplémentaires, contrainte critique cohésive σ_c et la valeur critique du taux de restitution d'énergie G_c , nous donne une description complète de l'initiation à la propagation de fissure. En mettant en place le coefficient pénalisation, on pourrait en construire une formulation de Lagrangien augmenté afin de s'affranchir la difficulté concernant la non-différentiabilité de la densité d'énergie surfacique de fissure en fonction du saut de déplacement. D'autre part, pour la technique où le saut de déplacement est possible à travers n'importe quel élément, il est très difficile à assurer la convergence de la simulation dont le résultat dépend éventuellement du maillage. Ainsi, même si l'hypothèse du chemin de fissure prédéfini limite nos études concernant la direction variée de fissure, elle nous permet de traiter de manière fiable et robuste plusieurs problèmes industriels. Ainsi, la méthode de Lagrangien augmenté pour les éléments cohésifs d'interface admet trois hypothèses suivantes

- *Chemin de fissure prédéfini* : la fissure s'initie et se propagation selon la loi cohésive seulement sur les éléments d'interface pré-insérés.
- *Petits déplacements* : cette hypothèse est valable pour le matériau élastique fragile et peut être couplée avec la réactualisation de géométrie pour le matériau élastoplastique.
- *Loi de comportement volumique indépendante des éléments d'interface* : dans le cas du matériau élastique fragile, la relation linéaire entre les champs de contrainte et de déformation reste valable avec le tenseur d'élasticité inchangé. Dans le cas du matériau élastoplastique, le tenseur d'élasticité et la loi de plasticité restent les même lors de l'évolution de fissure.

On présente maintenant des ingrédients principaux de la méthode de Lagrangien augmenté pour les éléments cohésifs d'interface au sein du matériau purement élastique, dont les étapes de

calculs sont détaillées dans [Lorentz, 2008]. Considérons l'énergie totale de la structure Ω étant une fonction du déplacement \mathbf{u} et le saut de déplacement $\boldsymbol{\delta}$ à travers la surface de discontinuité Γ comme suit

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}) := \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \Phi(\boldsymbol{\delta}) dS + \mathcal{F}_{ext}(\mathbf{u}) \quad (3.1)$$

Dans cette formulation, \mathbf{A} désigne le tenseur d'élasticité, Φ et \mathcal{F}_{ext} dénotent respectivement la densité d'énergie surfacique de fissure et le potentiel des efforts extérieurs. Par ailleurs, les champs $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta})$ appartient à l'espace des champs cinématiquement admissibles suivant

$$\mathcal{C} := \{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}) \in H^1(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{R}^2) \times H^1(\Gamma, \mathbb{R}^2) : \mathbf{u} = \mathbf{U} \text{ sur } \partial_D \Omega, \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\nu} \geq 0 \text{ sur } \Gamma, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \boldsymbol{\delta} \text{ sur } \Gamma\}$$

où $\partial_D \Omega$ est la partie de la borne de la structure Ω soumise au déplacement imposé \mathbf{U} et $\boldsymbol{\nu}$ désigne le vecteur normal unitaire de la fissure. Selon le principe de minimisation locale (Définition 4 du chapitre 1), $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta})$ sont solutions du problème seulement s'ils sont admissibles et minimisent localement l'énergie totale du système $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta})$. Afin d'aborder ce problème de minimisation sous contrainte, introduisons le Lagrangien \mathcal{L} avec le champ de multiplicateur lagrangien $\boldsymbol{\lambda}$ et le coefficient de pénalisation r

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}) := \mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta}) dS + \int_{\Gamma} \frac{r}{2} \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta}\|^2 dS \quad (3.2)$$

En conséquence, les champs solutions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$ devraient minimiser localement le Lagrangien \mathcal{L} dans l'espace des champs admissibles. Choisissons les champs tests admissibles suivants pour $h > 0$ suffisamment petit

$$\mathbf{u}^* := \mathbf{u} + h\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\delta}^* := \boldsymbol{\delta} + h\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\lambda}^* := \boldsymbol{\lambda} + h\boldsymbol{\zeta}$$

La minimisation locale du Lagrangien nous donne les propriétés suivantes

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{f} - \boldsymbol{\lambda} - r(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta})) \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \text{ admissible} \quad (3.3)$$

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\lambda} + r(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta})) \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \mathcal{F}_{ext}(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \text{ admissible} \quad (3.4)$$

$$\int_{\Gamma} (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \text{ admissible} \quad (3.5)$$

où \mathbf{f} désigne le sous-gradient de la densité d'énergie surfacique de fissure par rapport au saut de déplacement $\mathbf{f} \in \partial \Phi(\boldsymbol{\delta})$. Ainsi, \mathbf{f} et $\boldsymbol{\delta}$ sont liés par la loi cohésive. On en déduit de l'équation (3.3) que le champ de multiplicateur lagrangien $\boldsymbol{\lambda}$ mesure la force cohésive, à un terme de pénalisation près. L'équation (3.4) nous donne les équations d'équilibre avec les conditions aux limites. Finalement, (3.5) n'est rien d'autre que la condition admissible pour $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta})$.

Ces formulations de Lagrangien augmenté sont à mettre en place dans la discrétisation d'élément infini. Un schéma de la discrétisation par élément fini d'interface est montré dans la figure 3.1. A chaque instant t , l'objectif de l'algorithme convergent de type Newton-Raphson est d'identifier numériquement le champ de déplacement \mathbf{u} dans $\Omega \setminus \Gamma$ et le champ de multiplicateur lagrangien (autrement dit, la force cohésive) $\boldsymbol{\lambda}$ sur Γ . En particulier, le champ de déplacement \mathbf{u}

admet l'interpolation quadratique avec l'élément fini classique lagrangien (**P2-continue**), ainsi l'espace des champs de déplacement discrétisé s'écrit comme suit

$$\mathcal{U}_h := \{ \mathbf{u} : \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Gamma, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}(\mathbf{x})]\{\mathbf{U}\} \}$$

où $\{\mathbf{U}\}$ dénote le champ de déplacement au nœud et $[\mathbf{N}]$ désigne la matrice des fonctions de forme quadratiques. La discontinuité du champ de déplacement se calcule grâce à la projection de \mathbf{u} sur les lèvres supérieure Γ_+ et inférieure Γ_-

$$\forall \mathbf{s} \in \Gamma \quad \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{s}) \rrbracket = [\mathbf{D}(\mathbf{s})]\{\mathbf{U}\} \quad \text{pour } [\mathbf{D}(\mathbf{s})] := [\mathbf{N}_+(\mathbf{x})] - [\mathbf{N}_-(\mathbf{x})]$$

où $[\mathbf{N}_+]$ et $[\mathbf{N}_-]$ sont respectivement les projections sur Γ_+ et Γ_- de la matrice $[\mathbf{N}]$, $[\mathbf{D}]$ désigne la matrice des fonctions de forme quadratiques qui interpole la discontinuité de déplacement. Par ailleurs, le champ de multiplicateur lagrangien est interpolé par les fonctions de forme linéaires par morceaux (**P1-continues**) et donc l'espace des champs de multiplicateur lagrangien discrétisé s'exprime comme suit

$$\mathcal{L}_h := \{ \boldsymbol{\lambda} : \quad \forall \mathbf{s} \in \Gamma, \quad \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{s}) = [\mathbf{L}(\mathbf{s})]\{\boldsymbol{\Lambda}\} \}$$

où $\{\boldsymbol{\Lambda}\}$ dénote le champ de multiplicateur au nœud et $[\mathbf{L}]$ désigne la matrice des fonctions de forme linéaires. En utilisant (3.3), on en déduira le champ du saut de déplacement $\boldsymbol{\delta}$ à travers la fissure Γ . D'ailleurs, il faudrait noter que la discrétisation du saut de déplacement $\boldsymbol{\delta}$ est basée sur les points de Gauss de Γ dont leurs positions sont dénotées par \mathbf{s}_g . On choisit l'interpolation linéaire **P1-discontinue** pour $\boldsymbol{\delta}$. Le poids du point de Gauss \mathbf{s}_g de Γ est dénoté par ω_g . L'équation (3.3) induit la relation suivante sur chaque point de Gauss de Γ

$$\mathbf{f}_g = \boldsymbol{\lambda}_g + r(\llbracket \mathbf{u}_g \rrbracket - \boldsymbol{\delta}_g) \in \partial\Phi(\boldsymbol{\delta}_g) \quad \text{pour } \begin{cases} \llbracket \mathbf{u}_g \rrbracket = [\mathbf{D}(\mathbf{s}_g)]\{\mathbf{U}\} \\ \boldsymbol{\lambda}_g = [\mathbf{L}(\mathbf{s}_g)]\{\boldsymbol{\Lambda}\} \end{cases}$$

Cette relation nous permet de calculer $\boldsymbol{\delta}_g$ en fonction des valeurs aux nœuds ($\{\mathbf{U}\}, \{\boldsymbol{\Lambda}\}$)

$$\boldsymbol{\delta}_g = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Lambda}) \tag{3.6}$$

Il faudrait noter que le coefficient de pénalisation assure l'unicité de cette solution, ainsi la robustesse de l'algorithme. En injectant (3.6) dans (3.4)-(3.5), on obtient un système d'équations non-linéaires dont les inconnues sont les déplacements nœaux $\{\mathbf{U}\}$ et les multiplicateurs nœaux $\{\boldsymbol{\Lambda}\}$

$$\begin{cases} \int_{\Omega \setminus \Gamma} [\nabla \mathbf{N}]^t \mathbf{A} [\nabla \mathbf{N}] + \sum_g \omega_g [\mathbf{D}_g]^t \left([\mathbf{L}_g]\{\boldsymbol{\Lambda}\} + r[\mathbf{D}_g]\{\mathbf{U}\} - r\boldsymbol{\delta}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Lambda}) \right) = \{\mathbf{F}_{ext}\} \\ \sum_g \omega_g [\mathbf{L}_g]^t \left([\mathbf{D}_g]\{\mathbf{U}\} - \boldsymbol{\delta}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Lambda}) \right) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

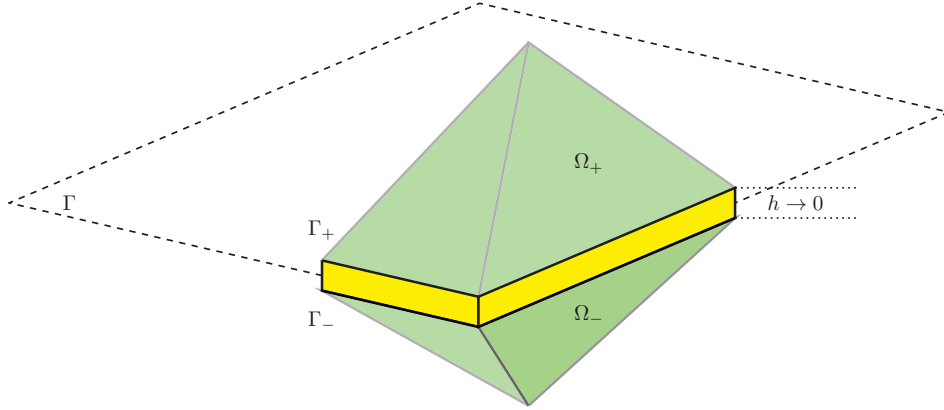


FIGURE 3.1 – Discrétisation par élément fini d'interface

3.1.2 Méthode du pilotage du chargement

Cette méthode numérique nous permet de suivre l'évolution de la fissure au sein de la structure en assurant la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson en quasi-statique malgré l'instabilité de la réponse globale, *i.e.* lorsque le snap-back est présent sur la dernière. Le pilotage est parfois nécessaire même si la réponse globale n'admet pas de retour arrière, du fait que l'ouverture brutale *locale* peut exister lors de l'évolution de la fissure. Le principe du pilotage du chargement est de calculer l'intensité du chargement en contrôlant la variation d'une autre grandeur physique \mathcal{P} de la structure. Dans ce cas, le chargement auquel la structure est soumise n'est plus proportionnel au temps courant t comme dans la simulation «classique» mais la grandeur physique \mathcal{P} l'est. Concrètement, on considère que le chargement (forces extérieures \mathbf{F} et déplacements imposés \mathbf{U}) se décompose additivement en deux termes, l'un connu et imposé par l'utilisateur (\mathbf{F}_{impo} et \mathbf{U}_{impo}) et l'autre (\mathbf{F}_{pilo} et \mathbf{U}_{pilo}) dont la direction est connue mais l'intensité dénotée par η est une nouvelle inconnue du problème.

$$\begin{cases} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{impo} + \eta \mathbf{F}_{pilo} \\ \mathbf{U} &= \mathbf{U}_{impo} + \eta \mathbf{U}_{pilo} \end{cases}$$

La relation entre la variation de la grandeur physique $\mathcal{P}(\eta)$ étant une fonction de η et le pas de temps s'écrit sous la forme

$$\Delta \mathcal{P}(\eta) = \frac{\Delta t}{\mathbf{C}} \quad (3.8)$$

où \mathbf{C} désigne le coefficient de pilotage. Ainsi, la variation de \mathcal{P} est proportionnelle au pas de temps lors du chargement. La résolution de l'équation (3.8) dépend de la nature du contrôle de pilotage. En particulier, dans les simulations utilisant le modèle de zone cohésive, deux types de pilotages suivants sont régulièrement mis en œuvre

- (i) *Pilotage par contrôle d'un degré de liberté de déplacement.* La variation de la fonction \mathcal{P} est celle d'un degré de liberté de déplacement d'un nœud choisi. Un cas particulier de ce type du pilotage consiste à contrôler l'ouverture de fissure à la position d'un point situé sur la ligne de discontinuité. Ce type de pilotage est très simple à réaliser et ne dépend pas de

la loi de comportement mais la simulation peut être difficile à converger suite à l'ouverture brutale locale.

- (ii) *Pilotage par la prédiction élastique.* La variation de la fonction \mathcal{P} est le maximum de l'énergie dissipée prise sur tous les points de Gauss entre deux pas de temps. En effet, la formulation de \mathcal{P} est construite à partir des calculs élastiques et un critère dissipatif. Ce type de pilotage est spécifique et donc requiert une implémentation associée à chaque loi de comportement et chaque loi cohésive. L'avantage important de ce type de pilotage est de faciliter la convergence de simulation grâce à l'identification automatique du point «sorti du critère» par maximisation d'énergie.

En se basant sur la méthode de Lagrangien augmenté et le pilotage, le chapitre est consacré d'une part à la validation des résultats analytiques des chapitres précédents, d'autre part de mettre en œuvre le modèle de zone cohésive dans les simulations d'évolution de fissure au sein des structures industrielles. Le critère d'initiation de fissure cohésive en mode mixte sous la forme d'une courbe cohésive intrinsèque est implémenté dans *Code_Aster*. Le post-traitement élastoplastique nous permet d'identifier la position du site d'amorçage au sein des éprouvettes en prenant en compte la plasticité et la trilateralité de contrainte. Les effets de structure sur l'amorçage de fissure cohésive sont donc considérés. Par ailleurs, les effets du champ de contrainte non-uniforme sur l'initiation et la propagation de fissure sont considérés numériquement et comparés avec des formulations analytiques présentées dans le chapitre 2. Les évolutions de la longueur et l'ouverture de fissure en fonction du chargement sont mises en discussion.

3.2 Initiation et propagation de fissure cohésive en mode mixte

La section est consacrée à l'implémentation du modèle cohésif en mode mixte dans le code d'élément fini. L'initiation d'une fissure à partir de la structure saine et la propagation de fissure cohésive sont abordées successivement. On considère une forme particulière de la courbe cohésive intrinsèque et met en place le post-traitement du problème élasto-plastique afin d'étudier l'amorçage de la fissure cohésive. De plus, la forme de la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive prenant en compte le couplage entre deux modes de fissuration est détaillée. La discrétisation des grandeurs, dont le champ de déplacement, le saut de déplacement et le champ de multiplicateur lagrangien, est mise en œuvre. Les exemples concernant l'initiation et la propagation au sein des éprouvettes différentes sont étudiés et mis en discussion.

3.2.1 Post-traitement - Critère d'amorçage cohésif multidimensionnel

3.2.1.1 Procédure d'identification du site d'amorçage de fissure cohésive

Considérons dans cette sous section l'initiation de la fissure cohésive au sein d'une structure Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^3 . Le matériau est isotrope, homogène de comportement élastoplastique. Γ dénote un hyperplan arbitraire de dimension 2 qui passe par un point $\mathbf{O} \in \Omega$. Son vecteur normal unitaire est dénoté par \mathbf{n} . Rappelons que le critère d'initiation de fissure cohésive au sein d'une structure multi-dimensionnelle s'exprime comme suit (voir (1.73))

$$\varphi(\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}, \|\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}\|) \geq \sigma \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad \forall (\boldsymbol{\delta}, \mathbf{n}) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \text{ tels que } \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n} \geq 0$$

où φ défini dans (1.61) désigne la dérivée à 0 de la densité d'énergie surfacique de fissure, σ désigne le tenseur de contrainte et δ est un vecteur de saut unitaire. En particulier, dans le cas où φ est seulement Gâteaux-différentiable à l'origine, le critère d'amorçage cohésif basé sur les contraintes principales s'écrit comme suit

$$\frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2} \leq \varphi^* \left(\frac{\sigma_{III} + \sigma_I}{2} \right)$$

où

$$\varphi^* = \inf_{\lambda \geq 0} \{ \varphi(\lambda, 1) - \lambda \Sigma \}$$

Dans la formulation du critère, les contraintes principales sont dénotées dans l'ordre croissant $\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}$. A partir du critère d'initiation de fissure cohésive sous la forme d'une courbe cohésive intrinsèque dans le plan des contraintes, l'implémentation dans *Code_Aster* est réalisée comme suit. Correspondant au vecteur unitaire \mathbf{n} arbitraire, le champ de contrainte σ au point \mathbf{O} peut être décomposé en composantes normale et tangentielle $\sigma \mathbf{n} = \Sigma \mathbf{n} + \mathbf{T}$ où $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0$. Le critère cohésif sous la forme d'une courbe cohésive intrinsèque elliptique dans le plan des contraintes (Σ, \mathbf{T}) devrait être validé pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$

$$f(\sigma) = \begin{cases} \left(\frac{\|\mathbf{T}\|}{\tau_c} \right)^2 & \leq 1 & \text{si } \Sigma \leq 0 \\ \left(\frac{\Sigma}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\|\mathbf{T}\|}{\tau_c} \right)^2 & \leq 1 & \text{si } \Sigma \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Le rapport entre deux contraintes critiques est dénoté par $\beta = \sigma_c / \tau_c$. Ce critère signifie que la fissure cohésive s'initie lors que le cercle de Mohr correspondant à $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ est tangentiel à la courbe cohésive intrinsèque dans le plan des contraintes. Dans ce cas concret (3.9), la courbe cohésive est un rectangle semi-infini dans le demi-gauche et une courbe elliptique dans le demi-droite du plan des contraintes, voir la figure 3.2. On fait l'hypothèse que cette courbe cohésive est une propriété intrinsèque du matériau, ainsi elle ne dépend pas de l'état du champ de déformation. En particulier, lors de l'évolution de la fissure au sein d'un matériau élastoplastique, la courbe cohésive est indépendante de la déformation plastique dénotée par p . Afin d'identifier la position de site d'amorçage, ainsi les champs de contrainte et de déformation associés, en utilisant cette courbe cohésive intrinsèque, les procédures de simulation et post-traitement sont comme suit

- *Maillage*. En supposant que la fissure ne s'est pas encore initiée, toute la structure est maillée régulièrement.
- *Données du matériau*. A côté des constants du comportement élastoplastique (module Young E , coefficient de Poisson ν , courbe traction-déformation durcissante, contrainte critique de plasticité σ_y), la courbe cohésive intrinsèque devrait être entrée par l'utilisateur. Dans le cas du matériau admettant (3.9), seulement les valeurs de contraintes critiques (σ_c, τ_c) sont à saisir.
- *Simulation élastoplastique sans fissure*. Le chargement augmente monotonement. La simulation par élément fini nous permet d'obtenir le champ de contrainte $\sigma(\mathbf{x}, t)$ dans toute la structure correspondant à chaque instant.

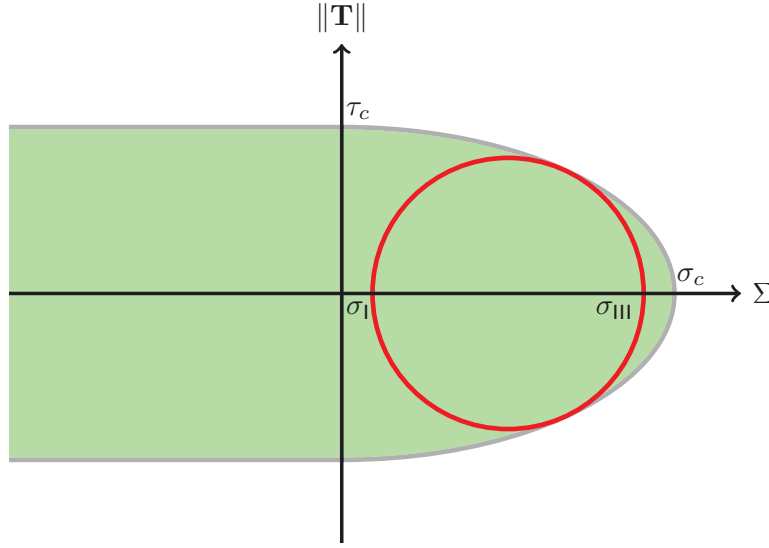


FIGURE 3.2 – Critère d'initiation de fissure cohésive sous la forme d'une courbe intrinsèque du matériau

- *Post-traitement.* A partir du champ de contrainte $\sigma(\mathbf{x}, t)$, le post-traitement nous permet de calculer les contraintes principales $(\sigma_I(\mathbf{x}, t), \sigma_{II}(\mathbf{x}, t), \sigma_{III}(\mathbf{x}, t))$. On en déduit le cercles de Mohr dans le plan des contraintes de chaque point du domaine à chaque instant dont le centre se situe à $\left(0, \frac{\sigma_I(\mathbf{x}, t) + \sigma_{III}(\mathbf{x}, t)}{2}\right)$ et le rayon vaut $\frac{\sigma_{III}(\mathbf{x}, t) - \sigma_I(\mathbf{x}, t)}{2}$. Lors que l'un de ces cercles de Mohr est tangentiel à l'ellipse donnée par (3.9), la fissure cohésive s'initie, ainsi on pourra identifier la position du premier site d'amorçage de fissure cohésive et l'instant correspondant. La figure 3.2 nous montre un schéma de cette configuration.

Remarque 17 (Effet de la triaxialité de contrainte). *La configuration du cercle de Mohr dans le plan des contraintes, ainsi le point de contact entre ce cercle et la courbe cohésive intrinsèque dépend de la triaxialité de contrainte donnée par*

$$\eta := \frac{1}{3} \frac{\text{tr } \sigma}{\sigma_{eq}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{\sqrt{(2\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (2\sigma_{II} - \sigma_I - \sigma_{III})^2 + (2\sigma_{III} - \sigma_I - \sigma_{II})^2}}$$

En effet, plus la triaxialité η est grande, plus le cercle de Mohr des contraintes se situe à droite de l'axe Σ et plus le point de contact entre ce cercle et l'ellipse donnée par (3.9) se situe proche du point $(\sigma_c, 0)$ dans le diagramme $(\Sigma, \|\mathbf{T}\|)$. Considérons deux cas particuliers suivants

- *Cisaillement pur* : $\text{tr } \sigma = 0$, donc $\eta = 0$. Dans le cas où $\sigma_{II} = 0, 0 < \sigma_{III} = -\sigma_I$, le centre du cercle de Mohr se situe à l'origine et le rayon vaut σ_{III} . Le point de contact est $(0, \tau_c)$ sur l'axe $\|\mathbf{T}\|$ du diagramme $(\Sigma, \|\mathbf{T}\|)$. Cela confirme que τ_c joue le rôle de contrainte critique cohésive de cisaillement.
- *Pression hydrostatique* : $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$, donc $\eta \rightarrow \infty$. Dans ce cas, le centre de du cercle de Mohr se situe à σ_{III} et le rayon s'annule. Le point de contact est coïncide au point d'extrémité $(\sigma_c, 0)$ de la courbe cohésive intrinsèque.

3.2.1.2 Exemple d'initiation de fissure cohésive au sein des éprouvettes axisymétriques entaillées

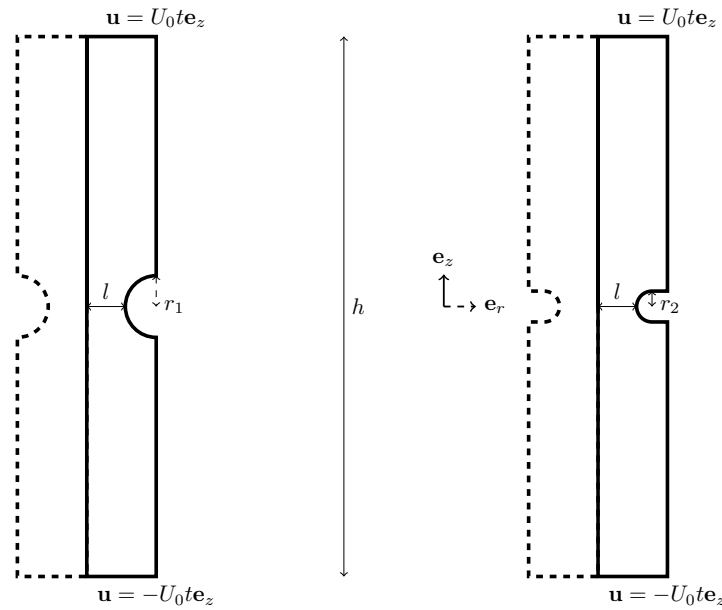


FIGURE 3.3 – Géométries de deux éprouvettes axisymétriques entaillées, éprouvette AE1 à gauche et éprouvette AE2 à droite

La simulation a pour l'objectif d'identifier la position du site d'amorçage par le post-traitement élastoplastique du champ des contraintes utilisant la courbe cohésive intrinsèque du matériau, ainsi ces résultats nous permettent d'étudier les effets de la structure et de la triaxilité de contraintes sur l'initiation de fissure cohésive. Afin d'aborder cet objectif, les simulations sont réalisées sur deux géométries différentes d'éprouvettes axisymétrique entaillées (AE) dont les hauteurs h et les largeurs du ligament l des éprouvettes sont les mêmes mais les rayons de l'entaille sont différents. Les dimensions des éprouvette sont représentées dans la table 3.1. Avant d'être soumis au chargement, la structure n'est pas déformée ni fissurée. Les chargements en déplacement imposé monotones, proportionnels au temps t sont appliqués à deux extrémités de chaque éprouvette. Par symétrie, les essais sur ces éprouvettes sont simulés par la modélisation 2D axisymétrique. La figure 3.3 présente le schéma bidimensionnel des deux géométries d'éprouvettes axisymétriques entaillées avec les conditions symétriques et les chargements monotones. La matériau admet le comportement élastoplastique homogène, isotrope avec le critère de plasticité de Von-Mises. Ce comportement est donné par la réponse globale déformation moyenne-contrainte dans l'essai de traction uni-axial. Ce comportement est évidemment une entrée de notre simula-

3.2. Initiation et propagation de fissure cohésive en mode mixte

tion et peut être écrit approximativement par la loi de puissance suivante

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{si } \varepsilon < \sigma_y/E \\ \sigma_y \left(\frac{E}{\sigma} \varepsilon \right)^{1/N} & \text{si } \varepsilon \geq \sigma_y/E \end{cases}$$

Dans cette formulation, ε et σ désignent respectivement la déformation moyenne et la contrainte de l'essai de traction uni-axial. Les constantes du matériaux entrées par utilisateurs sont le module Young $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, la limite d'élasticité $\sigma_y = 420 \text{ MPa}$ et le coefficient de durcissement $N = 0,1$. Cette loi de comportement est représentée dans la figure 3.4. Par ailleurs, la courbe cohésive intrinsèque devrait également être entrée par l'utilisateur. En supposant que le matériau considéré admet la courbe cohésive elliptique (3.9), seulement deux contraintes critiques (σ_c, τ_c) sont nécessaires. Choisissons $\sigma_c = 1680 \text{ MPa}$, $\tau_c = 420 \text{ MPa}$.

Remarque 18. *L'identification des paramètres (σ_c, τ_c) reste une difficulté dans la pratique expérimentale et numérique. En particulier dans le cas d'évolution de la fissure au sein du matériau ductile, les contraintes critiques d'initiation de fissure ne sont pas coïncides aux contraintes à la rupture. De plus, au point de vue expérimental, il est difficile à détecter de manière exacte l'instant d'amorçage de fissure en considérant seulement la réponse globale de la structure, suite à les influences des différents phénomènes non-linéaires, dont la grande déformation, la plasticité et la décharge locale.*

TABLE 3.1 – Géométrie de deux éprouvettes axisymétriques entaillées

	AE1	AE2
$l(\text{mm})$	3,0	3,0
$h(\text{mm})$	21,0	21,0
$r(\text{mm})$	2,4	1,2

On suit les procédures présentées dans la sous section précédente. En augmentant monotonement le chargement de 0, la simulation nous donne le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, ainsi les contraintes principales ($\sigma_I(\mathbf{x}, t), \sigma_{II}(\mathbf{x}, t), \sigma_{III}(\mathbf{x}, t)$) à chaque point \mathbf{x} correspondant à chaque temps t . Afin de comparer les cercles de Mohr du champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ avec le critère de plasticité de Von-Mises et avec la courbe cohésive intrinsèque (3.9) dans le plan des contraintes lors du post-traitement, introduisons une variable d'identification \mathbf{d} suivante

$$\mathbf{d} = \begin{cases} 0 & \text{zone purement élastique} \\ 1 & \text{zone où le critère de plasticité est violé} \\ 2 & \text{zone où le critère cohésif est violé} \end{cases}$$

La figure 3.5 présente l'évolution de zone purement élastique (de couleur bleue, $\mathbf{d} = 0$), zone plastifiée (de couleur verte, $\mathbf{d} = 1$) et zone où le critère cohésif est violé (de couleur rouge, $\mathbf{d} = 2$) sur les deux éprouvettes axisymétriques entaillées au cours du temps. Cette évolution peut être divisée en quatre étapes suivante

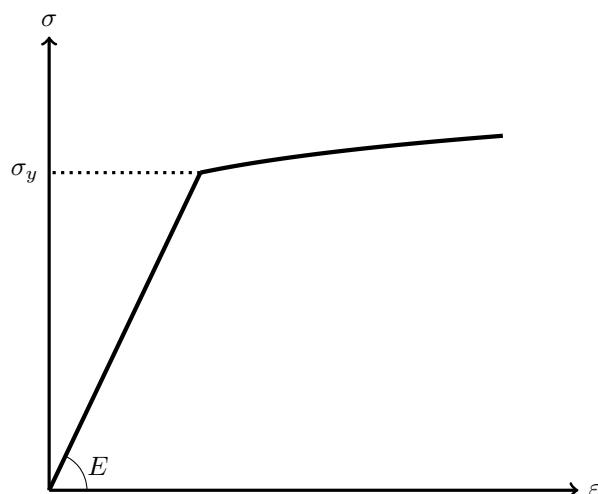


FIGURE 3.4 – Loi de puissance de comportement d'élastoplastique

- Après la phase purement élastique, lorsque le critère de plasticité de Von-Mises est violé, la première zone plastifiée apparaît sur les éprouvettes AE. Sur les deux éprouvettes AE, la première zone plastifiée *se situe toujours au bord du ligament*.
- La zone plastifiée évolue au sein de l'éprouvette et puis tout le ligament est plastifié.
- A l'instant critique t_c , le critère d'amorçage de fissure cohésive est violé à un point sur le ligament et donc la fissure s'amorce à ce point. En particulier, la position du premier site d'amorçage n'est pas identique sur les deux éprouvettes AE. En effet, la zone rouge **d** apparaît au centre de la première éprouvette mais au milieu du ligament de la deuxième éprouvette. L'influence de la géométrie sur la position du premier site d'amorçage est mis en évidence numériquement.
- L'évolution de la zone rouge **d** = 2 est différente sur les deux éprouvettes AE. En effet, le changement de direction potentielle sous la forme d'une cône de cette zone est beaucoup plus remarquable sur la première éprouvette que sur la deuxième. Dans tous les deux cas, on voit que le changement de direction de fissure cohésive lors de son évolution au sein de l'éprouvette AE est pertinent malgré la symétrie du problème.

Remarque 19. *Le résultat le plus important du post-traitement utilisant la courbe cohésive intrinsèque est l'identification du premier site d'amorçage au sein de l'éprouvette. Ce résultat nous permet à comparer avec les essais expérimentaux qui identifie approximativement la position d'amorçage en étudiant la facies des éprouvettes cassées après chaque essai. Néanmoins, en général l'évolution de la zone rouge **d** = 2 n'est pas coïncide au chemin réel de la fissure. En effet, lors du post-traitement, on n'a pas pris en compte la variation du champ de contrainte en présence de la fissure. Donc, on peut identifier la position du premier site d'amorçage sur le ligament de l'éprouvette et conclure seulement que la direction de la fissure varie lors de son évolution. Sachant que le chemin de fissure devrait être pré-défini et les éléments cohésifs d'interface devraient être posés le long du chemin dans la simulation numérique utilisant le modèle de zone*

cohésive, cette conclusion montre une difficulté lors de l'étude numérique de la propagation de fissure cohésive au sein de l'éprouvette axisymétrique entaillée.

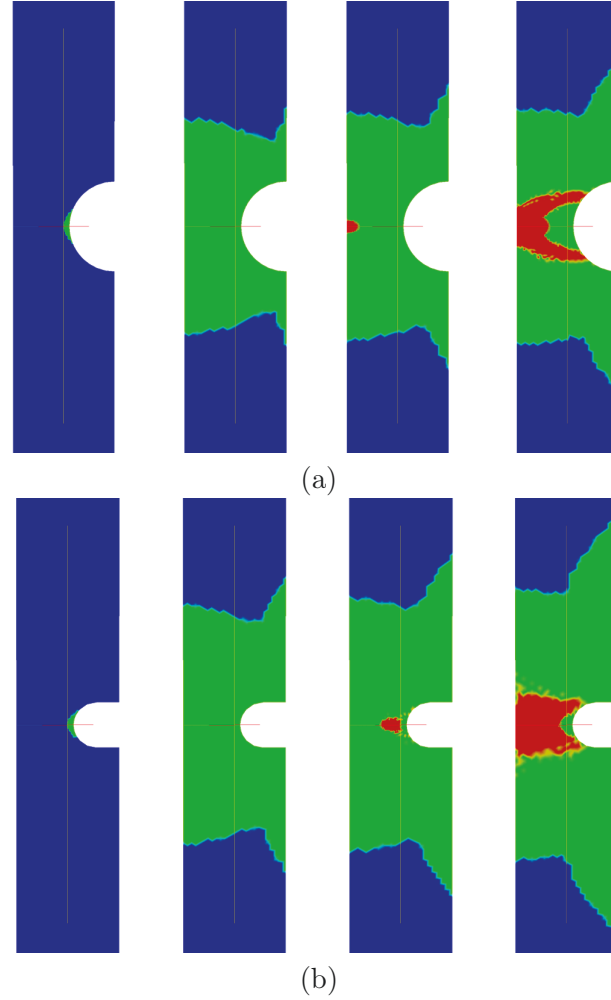


FIGURE 3.5 – Post-traitement - Visualisation sur les EAE (zone rouge)-critère d'amorçage violé, (zone verte)-plastification, (zone bleue)-purement élastique)

3.2.2 Propagation de fissure cohésive en mode mixte au sein du matériau élastique

3.2.2.1 Loi cohésive de type Talon-Curnier généralisée

Dans cette partie du chapitre, notre objectif est de généraliser la loi cohésive de type Talon-Curnier [Talon et Curnier, 2003] pour la fissure en mode mixte présenté dans [Lorentz, 2008] en prenant en compte le couplage entre deux modes de fissuration. Rappelons que dans [Lorentz, 2008], les relations (affines) entre la contrainte normale-saut normal de déplacement et entre la

contrainte de cisaillement-saut tangentiel de déplacement sont indépendantes. En plus, l'auteur considère un cas particulier où les valeurs de deux contraintes critiques (σ_c, τ_c) sont identiques. Ces hypothèses ne sont pas valables en général. En se basant toujours sur les arguments énergétiques de fissuration, on reformule la loi cohésive de type Talon-Curnier et l'implémente dans le code d'élément fini.

Γ dénote toujours un hyperplan de dimension 2 qui passe par un point $\mathbf{O} \in \Omega$ dont le vecteur normal unitaire est dénoté par \mathbf{n} . Différemment du problème d'initiation de fissure à partir d'une structure saine, la direction de la surface potentielle de discontinuité, *i.e.* le vecteur normal \mathbf{n} , devrait être *pré-définie*. Du point de vue d'élément fini, une couche d'éléments cohésifs interface est pré-posée au sein du domaine et la fissure n'évolue que le long de cette couche. Le saut de déplacement au point $\mathbf{x} \in S$ à l'instant $t > 0$ peut être décomposé en composantes normale et tangentielle

$$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t) = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(\mathbf{x}, t) = \delta_n(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_t(\mathbf{x}, t)$$

où $\boldsymbol{\delta}_t(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0$. De plus, on considère le cas où la direction (potentielle) du saut tangentiel de déplacement \mathbf{t} est connue, donc $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t)$ est caractérisé simplement par un couple de scalaires $(\delta_n(\mathbf{x}, t), \delta_t(\mathbf{x}, t))$ où $\delta_t(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{t}$. Suite à la non pénétration, le saut de déplacement normal δ_n devrait être positif. Par contre, le saut de déplacement tangentiel δ_t peut être positif ou négatif. Afin de prendre en compte le couplage entre deux modes de fissuration, définissons un produit scalaire suivant des deux vecteurs $\mathbf{a} = (a_n, a_t)^t$ et $\mathbf{b} = (b_n, b_t)^t$ comme suit

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_n b_n + \frac{a_t b_t}{\beta^2} = \mathbf{a} \mathbf{T} \mathbf{b} \quad (3.10)$$

où $\beta = \sigma_c / \tau_c$ désigne le rapport entre deux contraintes critiques et \mathbf{T} dénote la matrice de transformation écrite dans la base locale (\mathbf{n}, \mathbf{t})

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta^2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Il faudrait noter que cette matrice est intrinsèque du matériau. En conséquence, la norme du saut de déplacement $\boldsymbol{\delta}$ peut être écrite comme suit

$$\|\boldsymbol{\delta}\|(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\delta_n(\mathbf{x}, t)^2 + \frac{1}{\beta^2} \delta_t(\mathbf{x}, t)^2} = \sqrt{\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T} \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t)} \quad (3.12)$$

Le principe d'irréversibilité est pris en compte en introduisant une variable scalaire interne κ qui mesure la valeur actuelle maximale de la norme du saut de déplacement

$$\kappa(\mathbf{x}, t) = \sup_{t' < t} \|\boldsymbol{\delta}(t')\| \quad (3.13)$$

De manière similaire à la loi cohésive de Talon-Curnier présenté dans [Lorentz, 2008], la densité surfacique de fissure cohésive étant une fonction de la norme du saut de déplacement s'écrit comme suit

$$\Phi(\boldsymbol{\delta}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_c \|\boldsymbol{\delta}\| \left(2 - \frac{\sigma_c \|\boldsymbol{\delta}\|}{2G_c} \right) & \text{si } \|\boldsymbol{\delta}\| \leq 2G_c / \sigma_c \\ G_c & \text{si } \|\boldsymbol{\delta}\| \geq 2G_c / \sigma_c \end{cases} \quad (3.14)$$

3.2. Initiation et propagation de fissure cohésive en mode mixte

Cette formulation fait apparaître l'ouverture critique de la fissure cohésive

$$\delta_c = \frac{2G_c}{\sigma_c}$$

A ce stade, l'énergie surfacique de la fissure cohésive est entièrement définie. On peut en déduire la relation explicite entre le saut de déplacement $\boldsymbol{\delta}$ et le vecteur de contrainte cohésive \mathbf{f} qui est défini dans (3.3) comme le sous-gradient de la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive, *i.e.* $\mathbf{f} \in \partial\Phi(\boldsymbol{\delta})$. En particulier, le sous-gradient $\partial\Phi(\boldsymbol{\delta})$ dépend du saut actuel de déplacement $\boldsymbol{\delta}$ et de la variable interne scalaire κ donnée par (3.13)

- (i) *Pour* $\kappa = 0$ *et* $\boldsymbol{\delta} = 0$. Ce cas correspond à l'adhésion parfaite et le vecteur \mathbf{f} admet le critère d'amorçage de fissure cohésive (3.9)

$$\partial\Phi(\boldsymbol{\delta}) = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3 : \frac{f_n^2}{\sigma_c^2} + \frac{f_t^2}{\tau_c^2} \leq 1 \right\}$$

- (ii) *Hyper cône* $\|\boldsymbol{\delta}\| = \kappa > 0$. Ce cas correspond à la décharge verticale de contrainte

$$\partial\Phi(\boldsymbol{\delta}) = \left\{ f_n \mathbf{n} + \rho \mathbf{T} \boldsymbol{\delta} : 0 \leq \rho \leq \frac{\sigma_c}{\kappa} \left(1 - \frac{\sigma_c}{2G_c} \kappa \right) \text{ et } f_n \leq 0, \delta_n \geq 0, f_n \delta_n = 0 \right\}$$

- (iii) *Domaine où* $\|\boldsymbol{\delta}\| < \kappa$. Ce cas correspond au retour du saut de déplacement à zéro à contrainte nulle

$$\partial\Phi(\boldsymbol{\delta}) = \left\{ f_n \mathbf{n} : f_n \leq 0, \delta_n \geq 0, f_n \delta_n = 0 \right\}$$

- (iv) *Domaine où* $\|\boldsymbol{\delta}\| \geq \kappa$. Ce cas correspond à l'évolution de fissure cohésive

$$\partial\Phi(\boldsymbol{\delta}) = \left\{ f_n \mathbf{n} + \frac{\sigma_c}{\|\boldsymbol{\delta}\|} \left(1 - \frac{\sigma_c}{2G_c} \|\boldsymbol{\delta}\| \right) \mathbf{T} \boldsymbol{\delta} : f_n \leq 0, \delta_n \geq 0, f_n \delta_n = 0 \right\}$$

On écrit maintenant l'énergie totale de la structure fissurée étant une fonction du champ de déplacement \mathbf{u} et le saut de déplacement $\boldsymbol{\delta}$ à travers la surface de discontinuité Γ

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \Phi(\boldsymbol{\delta}) dS + \mathcal{F}_{ext}(\mathbf{u})$$

Notre objectif est de trouver $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta})$ qui minimisent localement l'énergie totale de la structure en respectant la condition de saut de déplacement $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \boldsymbol{\delta}$. Afin de résoudre le problème de minimisation locale sous condition, le lagrangien avec le champ de multiplicateur lagrangien $\boldsymbol{\delta}$ et le coefficient de pénalisation r comme suit est considéré

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta}) dS + \int_{\Gamma} \frac{r}{2} \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta}\|^2 dS$$

Les champs solutions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$ devraient minimiser localement le Lagrangien \mathcal{L} dans l'espace des champs admissible. Choisissons les champs tests admissibles suivants pour $h > 0$ suffisamment petit

$$\mathbf{u}^* := \mathbf{u} + h\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\delta}^* := \boldsymbol{\delta} + h\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\lambda}^* := \boldsymbol{\lambda} + h\boldsymbol{\zeta}$$

La condition de stabilité locale d'ordre 1 de $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta})$ s'écrit comme suit

$$\mathcal{L}'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta})(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$$

Cela induit que $\forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\delta}} - \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\delta})}{\partial \boldsymbol{\delta}} + r \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta} \parallel \frac{\partial \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta} \parallel}{\partial \boldsymbol{\delta}} \right] \cdot \boldsymbol{\eta} dS \\ & + \int_{\Gamma} \frac{\partial [\boldsymbol{\lambda} \cdot (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta})]}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \cdot \boldsymbol{\zeta} dS \\ & + \int_{\Omega \setminus \Gamma} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial (\boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} + r \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta} \parallel \frac{\partial \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta} \parallel}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \right] \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket dS + \mathcal{F}_{ext}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

On en déduit un système d'équations suivant

$$\sigma_c \left(1 - \frac{\sigma_c}{2G_c} \|\boldsymbol{\delta}\| \right) \frac{\mathbf{T} \boldsymbol{\delta}}{\|\boldsymbol{\delta}\|} = \mathbf{T} \boldsymbol{\lambda} + r \mathbf{T}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta}) \quad (3.16)$$

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \boldsymbol{\delta} \quad (3.17)$$

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Gamma} [\mathbf{T} \boldsymbol{\lambda} + r \mathbf{T}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta})] \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket dS = \mathcal{F}_{ext}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \quad (3.18)$$

La première équation du système désigne une relation entre le saut de déplacement et le champ de multiplicateur lagrangien, la deuxième équation est la condition admissible entre $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta})$ et la dernière nous donne les équations d'équilibre avec les conditions aux limites. Introduisons un nouveau vecteur de force $\boldsymbol{\tau}$ qui ne dépend pas de $\boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{\tau} := \boldsymbol{\lambda} + r \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (3.19)$$

En injectant ce vecteur dans l'équation (3.16), on obtient

$$\left[\frac{\sigma_c}{\|\boldsymbol{\delta}\|} \left(1 - \frac{\sigma_c}{2G_c} \|\boldsymbol{\delta}\| \right) + r \right] \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.20)$$

On en déduit une équation des normes comme suit

$$\sigma_c + \left(r - \frac{\sigma_c^2}{2G_c} \right) \|\boldsymbol{\delta}\| = \|\boldsymbol{\tau}\| \quad (3.21)$$

On retrouve l'équation du modèle de Talon-Curnier présenté dans [Lorentz, 2008] en cherchant l'intersection de deux droites de variable $\|\boldsymbol{\delta}\|$

$$\sigma_c - \frac{\sigma_c^2}{2G_c} \|\boldsymbol{\delta}\| = \|\boldsymbol{\tau}\| - r \|\boldsymbol{\delta}\| \quad (3.22)$$

Lors que la fissure évolue au sein de la structure, la première droite de (3.22) n'est rien d'autre que la norme du sous-gradient de la densité d'énergie surfacique de fissure cohésive, autrement

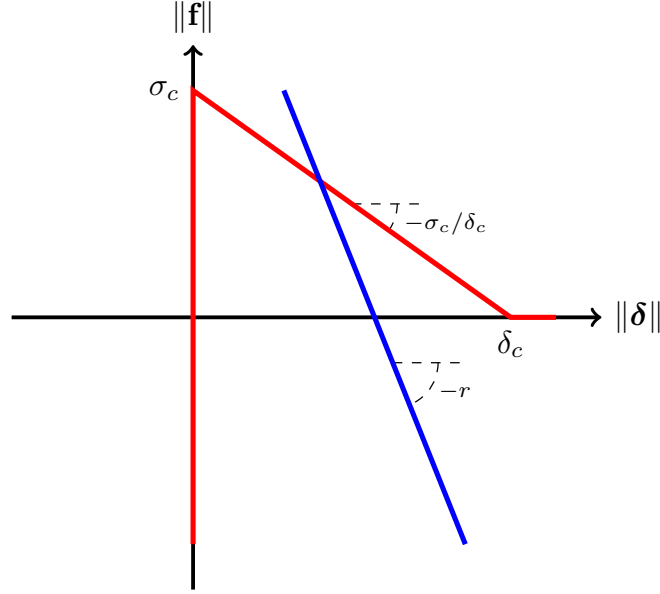


FIGURE 3.6 – Schéma de l'intersection de deux droites dans (3.22)

dit la norme du vecteur de contrainte cohésive $\|\mathbf{f}\|$. La deuxième droite admet une pente $-r$ et passe par le point $(0, \|\boldsymbol{\tau}\|)$ dans le diagramme des normes $(\|\boldsymbol{\delta}\|, \|\mathbf{f}\|)$. Le terme de pénalisation de la deuxième droite de (3.22) permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution en $\|\boldsymbol{\delta}\|$. En effet, pour que (3.22) admette une solution unique, le coefficient de pénalisation r devrait satisfaire la condition suivante

$$r > \max_{\boldsymbol{\delta}} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\delta}} \right\| = \frac{\sigma_c}{\delta_c} \quad (3.23)$$

Le schéma de l'intersection de deux droites dans (3.22) est montrée dans la figure 3.6.

En remplaçant $\delta_c = \frac{2G_c}{\sigma_c}$ et $h = \frac{\sigma_c^2}{2G_c} = \frac{\sigma_c}{\delta_c}$, la solution en $\|\boldsymbol{\delta}\|$ de l'équation (3.22) s'exprime comme suit

$$\|\boldsymbol{\delta}\| = \frac{\|\boldsymbol{\tau}\| - \sigma_c}{r - h} \quad (3.24)$$

Introduisons la variable d'écoulement comme suit

$$l_{bd} := \frac{\|\boldsymbol{\delta}\|}{\|\boldsymbol{\tau}\|} = \left[\frac{\sigma_c}{\|\boldsymbol{\delta}\|} \left(1 - \frac{\|\boldsymbol{\delta}\|}{\delta_c} \right) + r \right]^{-1}$$

En injectant (3.24) dans cette formulation, on obtient l'expression explicite de l_{bd} étant une fonction de $\|\boldsymbol{\tau}\|$

$$l_{bd} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \left(\delta_c + \frac{\|\boldsymbol{\tau}\| - r\delta_c}{r - h} \right) \quad (3.25)$$

A partir de (3.20) et (3.25), les composantes de $\boldsymbol{\delta}$ peuvent s'exprimer sous la forme suivante

$$\delta_n = l_{bd}\tau_n, \quad \delta_t = l_{bd}\tau_t \quad (3.26)$$

Par ailleurs, le vecteur de contrainte cohésive \mathbf{f} (sous-gradient de la densité d'énergie surfacique cohésive) s'exprime comme suit

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\tau} - r\boldsymbol{\delta}) \quad (3.27)$$

On cherche maintenant à calculer la matrice tangente $\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\tau}}$. En utilisant l'équation (3.25), l'équation (3.20) se réécrit sous la forme explicite

$$\boldsymbol{\delta} = \delta_c \left(1 - \frac{r}{r-h} \right) \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|} + \frac{1}{r-h} \boldsymbol{\tau}$$

En conséquence, la matrice tangente peut s'exprimer sous la forme suivante

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = l_{bd} \mathbf{I} + \mathcal{D} \begin{bmatrix} \tau_n^2 & \frac{\tau_n \tau_t}{\beta^2} \\ \tau_n \tau_t & \frac{\tau_t^2}{\beta^2} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

où $\mathbf{I} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$ désigne la matrice unitaire écrite dans la base locale (\mathbf{n}, \mathbf{t}) et le scalaire $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{r-h} - l_{bd} \right) \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}$.

3.2.2.2 Discrétisation

Le champ de déplacement \mathbf{u} est interpolé par les fonctions de forme quadratiques (**P2-continu**) dans le volume $\Omega \setminus \Gamma$. En conséquence, l'espace des champs de déplacement discrétisés s'exprime comme suit

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{u} : \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Gamma \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}(\mathbf{x})] \{ \mathbf{U} \} \}$$

où $\{ \mathbf{U} \}$ et $[\mathbf{N}]$ désignent respectivement le champ de déplacement au nœud et la matrice des fonctions de forme quadratiques. On en déduit la discontinuité du champ de déplacement discrétisé en projetant \mathbf{u} sur les lèvres supérieure Γ_+ et inférieure Γ_-

$$\forall \mathbf{s} \in \Gamma \quad \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(\mathbf{s}) = [\mathbf{D}(\mathbf{s})] \{ \mathbf{U} \} = \left([\mathbf{N}_+(\mathbf{s})] - [\mathbf{N}_-(\mathbf{s})] \right) [\mathbf{R}] \{ \mathbf{U} \}$$

Dans cette formulation, $[\mathbf{N}_+]$ et $[\mathbf{N}_-]$ sont respectivement les projections de \mathbf{N} sur Γ_+ et Γ_- , $[\mathbf{D}]$ représente la matrice des fonctions de forme quadratiques qui interpole la discontinuité de déplacement. \mathbf{R} est la matrice de rotation qui transforme les coordonnées dans le repère global $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ vers coordonnées dans le repère local (\mathbf{n}, \mathbf{t}) . D'ailleurs, le champ de multiplicateur lagrangien admet l'interpolation linéaire par morceaux (**P1-continu**) sur la surface de discontinuité Γ . Donc l'espace des multiplicateurs lagrangiens discrétisés s'écrit comme suit

$$\mathcal{L} = \{ \boldsymbol{\lambda} : \quad \forall \mathbf{s} \in \Gamma, \quad \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{s}) = [\mathbf{L}(\mathbf{s})] \{ \boldsymbol{\Lambda} \} \}$$

où $\{ \boldsymbol{\Lambda} \}$ et $[\mathbf{L}]$ désignent respectivement le champ de multiplicateur lagrangien aux nœuds et la matrice des fonctions de forme linéaires. Par la définition (3.19), la forme discrétisée du vecteur $\boldsymbol{\tau}$ peut être écrite sur la surface de discontinuité Γ

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{s}) = [\mathbf{L}(\mathbf{s})] \{ \boldsymbol{\Lambda} \} + r[\mathbf{D}(\mathbf{s})] \{ \mathbf{U} \} \quad \mathbf{s} \in \Gamma$$

3.2. Initiation et propagation de fissure cohésive en mode mixte

L'équation (3.20) devrait être résolue en chaque point de Gauss \mathbf{s}_g . Le terme de pénalisation r satisfait la condition (3.23) pour assurer l'existence et l'unicité de la solution δ_g aux points de Gauss. Le poids du point de Gauss \mathbf{s}_g sur la surface de discontinuité Γ est dénoté par ω_g . La solution au point de Gauss de l'équation (3.20) s'exprime sous la forme

$$\delta_g = \hat{\delta}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket(\mathbf{s}_g), \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{s}_g)) = \delta(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Lambda})$$

A partir de la solution, on peut calculer la forme discrétisée du vecteur de contrainte cohésive aux points de Gauss \mathbf{f}_g grâce à la relation (3.27)

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{T} \left([\mathbf{L}(\mathbf{s}_g)] \{ \boldsymbol{\Lambda} \} + r([\mathbf{D}(\mathbf{s}_g)] \{ \mathbf{U} \} - \delta_g) \right)$$

D'où la force intérieure discrétisée correspondant à $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ s'exprime :

$$F_{int}^{\mathbf{U}} = \sum_g \omega_g \mathbf{D}_g^t \mathbf{T} \left([\mathbf{L}(\mathbf{s}_g)] \{ \boldsymbol{\Lambda} \} + r([\mathbf{D}(\mathbf{s}_g)] \{ \mathbf{U} \} - \delta_g) \right)$$

Par ailleurs, la contrainte généralisée aux points de Gauss reliée au multiplicateur lagrangien $\boldsymbol{\lambda}$ se calcule à partir de (3.15)

$$\boldsymbol{\chi}_g = \mathbf{T} \left(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_g - \delta_g \right) = \mathbf{T} \left([\mathbf{D}(\mathbf{s}_g)] \{ \mathbf{U} \} - \delta_g \right)$$

On en déduit la force intérieure discrétisée correspondant à $\boldsymbol{\lambda}$:

$$F_{int}^{\mathbf{L}} = \sum_g \omega_g \mathbf{L}_g^t \mathbf{T} \left([\mathbf{D}(\mathbf{s}_g)] \{ \mathbf{U} \} - \delta_g \right)$$

Les composantes de la matrice de rigidité se calculent en dérivant $(F_{int}^{\mathbf{U}}, F_{int}^{\mathbf{L}})^t$ en fonction de $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Lambda})^t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{int}^{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} &= \sum_g \omega_g \mathbf{D}_g^t \mathbf{T} r \left(\mathbf{D}_g - \frac{\partial \delta_g}{\partial \mathbf{t}_g} r \mathbf{D}_g \right), & \frac{\partial F_{int}^{\mathbf{M}}}{\partial \mathbf{U}} &= \sum_g \omega_g \mathbf{L}_g^t \mathbf{T} \left(\mathbf{D}_g - \frac{\partial \delta_g}{\partial \mathbf{t}_g} r \mathbf{D}_g \right) \\ \frac{\partial F_{int}^{\mathbf{M}}}{\partial \mathbf{M}} &= - \sum_g \omega_g \mathbf{L}_g^t \mathbf{T} \frac{\partial \delta_g}{\partial \mathbf{t}_g} \mathbf{L}_g, & \frac{\partial F_{int}^{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{M}} &= \sum_g \omega_g \mathbf{D}_g^t \mathbf{T} \left[\mathbf{L}_g - r \frac{\partial \delta_g}{\partial \mathbf{t}_g} \mathbf{L}_g \right] \end{aligned}$$

D'ailleurs, on peut démontrer facilement que la matrice $\mathbf{T} \frac{\partial \delta_g}{\partial \mathbf{t}_g}$ est symétrique. En effet, en utilisant l'expression (3.28) on obtient

$$\mathbf{T} \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{t}} = l_{bd} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta^2} \end{bmatrix} + \mathcal{D} \begin{bmatrix} t_n^2 & \frac{t_n t_t}{\beta^2} \\ \frac{t_n t_t}{\beta^2} & \frac{t_t^2}{\beta^4} \end{bmatrix}$$

La symétrie de la matrice $\mathbf{T} \frac{\partial \delta_g}{\partial \mathbf{t}_g}$ induit que $\frac{\partial F_{int}^{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}}$ et $\frac{\partial F_{int}^{\mathbf{L}}}{\partial \mathbf{M}}$ sont symétriques et que

$$\left(\frac{\partial F_{int}^{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{L}} \right)^t = \frac{\partial F_{int}^{\mathbf{L}}}{\partial \mathbf{U}}$$

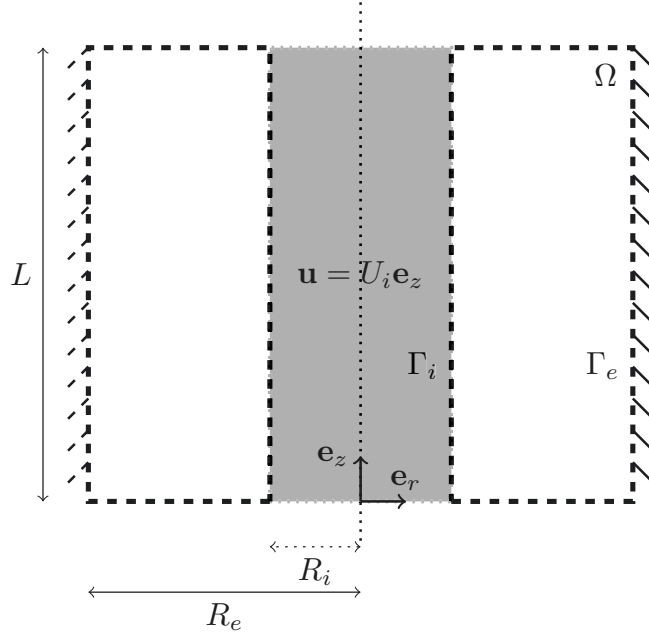


FIGURE 3.7 – Schéma du cas test d'arrachement d'une armature rigide

3.2.2.3 Exemple du cas test d'arrachement d'une armature rigide

Ce cas test a pour l'objectif l'étude numérique de l'arrachement d'une armature rigide encastrée dans un cylindre creux en utilisant le modèle de zone cohésive de type Talon-Curnier généralisé. La simulation numérique est basée sur l'hypothèse que la fissure est toujours en mode II pure, *i.e.* seulement le saut tangentiel de déplacement est non-nul, donc $\|\delta\| = \frac{\delta_t}{\beta}$. Le cas test nous permet de valider la mise en place de la contrainte critique de cisaillement τ_c , ainsi la relation entre la contrainte cohésive f_t et le saut tangentiel de déplacement δ_t lors de l'évolution de fissure cohésive.

Considérons un cylindre creux de longueur L , de rayon extérieur R_e et de rayon intérieur R_i . Γ_e et Γ_i dénotent respectivement les surfaces extérieure et intérieure du cylindre creux. Une armature **rigide** de section circulaire R_i est encastrée en son centre. Le matériau du cylindre creux admet le comportement **élastique** homogène, isotrope caractérisé par le module Young E et le coefficient de Poisson ν . Concernant la loi cohésive, l'utilisateur devrait entrer les valeurs des contraintes cohésives (σ_c, τ_c) et la valeur critique du taux de restitution d'énergie G_c . Selon les calculs précédents, on devrait choisir également un coefficient de pénalisation r assez grand pour assurer l'existence unique de la solution. Les valeurs numériques sont listées dans la table 4.1. Il faudrait noter que ces données ne correspondent à aucun matériau en particulier. Du fait que la fissure est toujours en mode II, *i.e.* cisaillement pur, la contrainte critique de traction σ_c ne joue pas de rôle lors de la simulation. D'ailleurs, un chargement consiste à appliquer sur l'armature rigide un déplacement $U_i \mathbf{e}_z$ ainsi qu'un déplacement nul sur le bord extérieur du cylindre Γ_e .

En supposant que le problème admet une solution axisymétrique, on peut restreindre notre

TABLE 3.2 – Données numériques du cas test d'arrachement

$L(\text{mm})$	$R_e(\text{mm})$	$R_i(\text{mm})$	$E(\text{MPa})$	ν	$\sigma_c(\text{MPa})$	$\tau_c(\text{MPa})$	$G_c (\text{MPa}.\text{mm})$	r
10	5,5	0,5	100	0	100	25	20	100

étude à un domaine bidimensionnel rectangulaire Ω . Le chargement sur l'armature rigide est pris en compte en appliquant le déplacement imposé $U_i \mathbf{e}_z$ sur tout le côté Γ_i du domaine Ω ainsi qu'un déplacement nul sur le côté Γ_e pour prendre en compte l'encastrement du cylindre. Une couche d'éléments cohésifs d'interface est posée le long de Γ_i . Hors de cette couche, le domaine Ω est maillé régulièrement avec l'interpolation quadratique. Afin de valider l'implémentation numérique de la loi cohésive de type Talon-Curnier généralisée, on considère la relation entre le saut tangentiel de déplacement et la composante tangentielle de contrainte cohésive à un point de Gauss quelconque de la couche d'éléments cohésifs d'interface. Rappelons que la variable interne scalaire κ mesure la valeur actuelle maximale de la norme du saut de déplacement $\|\boldsymbol{\delta}\| = \delta_t/\beta$. La simulation contient cinq étapes suivantes

- Chargement U_i croissant et adhésion parfaite $\kappa = \frac{\delta_t}{\beta} = 0$
- Chargement U_i croissant et évolution de fissure $\frac{\delta_t}{\beta} > \kappa$
- Chargement U_i décroissant et décharge verticale de contrainte suivie du retour de δ_t à zéro à contrainte nulle $\frac{\delta_t}{\beta} \leq \kappa$
- Chargement U_i décroissant, contrainte nulle et δ_t devient négatif en respectant $\frac{|\delta_t|}{\beta} < \kappa$
- Chargement U_i décroissant, δ_t est négatif mais $\frac{|\delta_t|}{\beta} > \kappa$, contrainte devient non nulle et décroissant en temps.

Les étapes de simulation sont visualisées dans la figure 3.8.

3.3 Effets de la contrainte non-uniforme

Les effets du champ de contrainte non-uniforme sur l'initiation et la propagation de la fissure au sein d'un milieu bidimensionnel sont étudiés par la simulation numérique dans cette section et comparés avec les formulations analytique du chapitre 2. Le comportement homogène, isotrope, purement élastique du matériau est caractérisé par le module Young $E = 2,07.10^5 \text{MPa}$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. En effet, ces valeurs numériques sont les données élastiques de l'acier utilisé dans plusieurs pièces industrielles. On suppose que la fissure est toujours en mode I, ainsi seulement la partie normale du saut de déplacement $\llbracket u_n \rrbracket = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ n'est pas nulle, où \mathbf{n} désigne le vecteur normal unitaire de la fissure. Ce matériau adopte a loi cohésive de type Dugdale dans laquelle la relation entre la densité d'énergie surfacique de fissure Φ et le saut

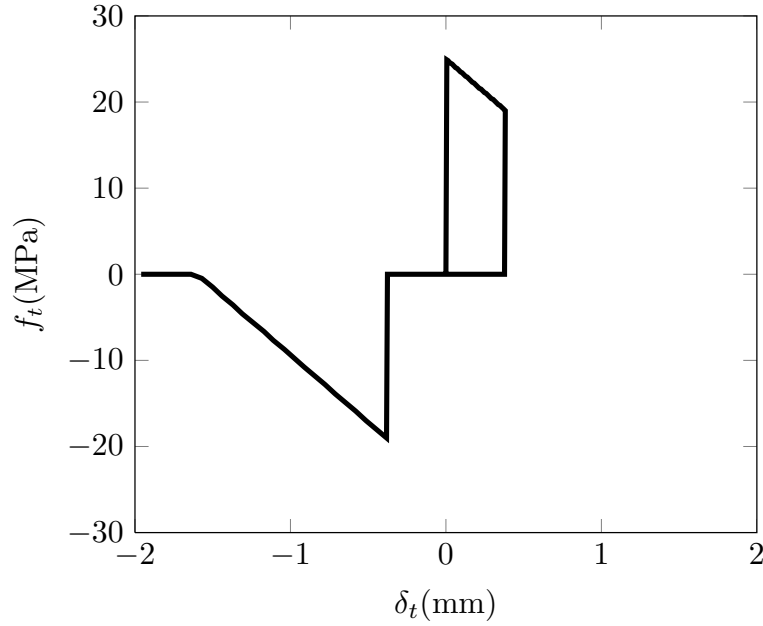


FIGURE 3.8 – Relation entre le saut tangentiel de déplacement et la composante tangentielle de contrainte cohésive

normal de déplacement $\llbracket u_n \rrbracket$ s'écrit comme suit

$$\Phi(\llbracket u_n \rrbracket) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket < 0 \\ \sigma_c \llbracket u_n \rrbracket & \text{si } 0 \leq \llbracket u_n \rrbracket \leq G_c / \sigma_c \\ G_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket > G_c / \sigma_c \end{cases}$$

La contrainte critique et la valeur critique du taux de restitution d'énergie sont respectivement données par l'utilisateur : $G_c = 100 \text{ MPa} \cdot \text{mm}$, $\sigma_c = 1200 \text{ MPa}$. Le rapport entre deux grandeurs représente le saut critique de la fissure cohésive $\delta_c := G_c / \sigma_c \approx 0,08 \text{ mm}$. A partir des données du comportement élastique du matériau et de la loi cohésive, on en déduit la valeur de la longueur caractéristique du matériau définie dans (2.11)

$$d_c = \frac{\pi}{8(1 - \nu^2)} \frac{E}{\sigma_c} \delta_c \approx 5,95 \text{ mm}$$

Il nous faudrait générer un champ de contrainte (plane) non-uniforme au sein de la structure pour initier et faire propager la fissure, soit en appliquant un chargement non-uniforme sur un domaine régulier soit en créant une singularité de géométrie dans la structure. En choisissant la première technique, on réalise la simulation sur un carré de côté $L = 400 \text{ mm}$ dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, dénoté par $ABCD = [-200, 200] \times [-200, 200]$. Notons que la dimension L du domaine est éventuellement très grande par rapport à la longueur caractéristique du matériau d_c . Les chargements non-uniformes sont appliqués sur les côtés opposés AB et CD du carré pour que les hypothèses de symétries suivantes soient satisfaites

- Le champ de contrainte ne contient pas de composante de cisaillement
- La fissure est toujours en mode I et se propage sur l'axe $x_2 = 0$

Donc, on pourrait choisir à appliquer les forces linéiques non-uniformes parallèles à \mathbf{e}_2 le long de AB et CD . Par symétrie, une moitié du carré est considéré avec la condition de symétrie imposée sur l'axe $x_2 = 0$. L'intensité de force linéique le long de AB est choisie comme suit

$$F_t = \mathcal{T}(x_1)t = 2,06.10^3 \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{5} \right)^2 \right] t \quad (3.29)$$

où t désigne le temps qui est considéré comme un paramètre de chargement et la fonction de chargement $\mathcal{T}(x_1)$ est une fonction *gaussienne* de l'abscisse x_1 , voir la figure 3.9. En conséquence, $\sigma_{22}(t)$ est la seule composante non-nulle du champ de contrainte le long de l'axe $x_2 = 0$.

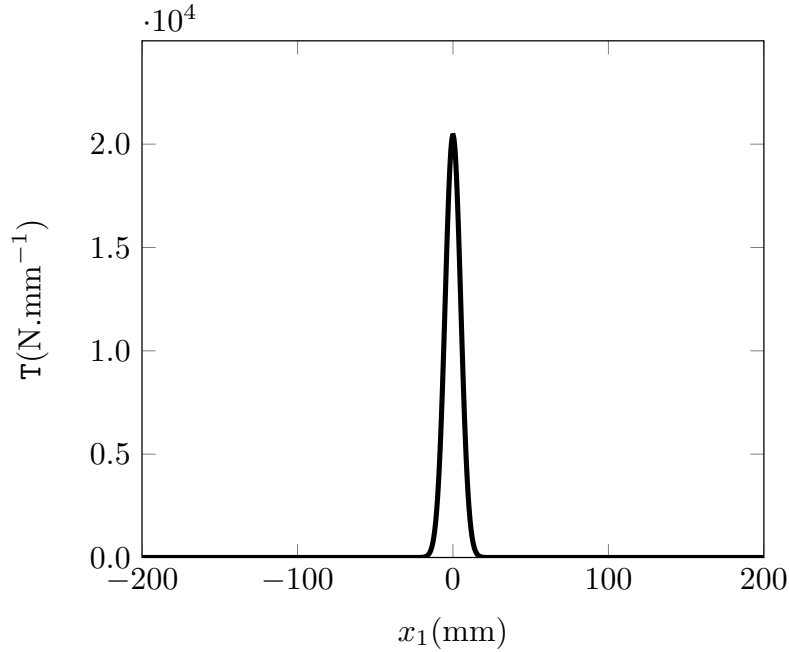


FIGURE 3.9 – Fonction de chargement appliqué sur AB

La structure est maillée régulièrement avec interpolation quadratique et une couche d'éléments cohésifs d'interface de très faible épaisseur $h \rightarrow 0$ est posée sur la ligne symétrique, *i.e.* l'axe $x_2 = 0$. Figure 3.10 représente le maillage régulier de la structure avec une zone des éléments cohésifs d'interface posée sur la ligne de symétrie.

En augmentant monotonement le chargement, ainsi le paramètre de chargement t , la simulation suit la procédure d'évolution de fissure, de la phase purement élastique à l'initiation et la propagation de la fissure.

3.3.1 Branche élastique

Pour cette branche, les éléments cohésifs d'interface ne sont pas encore actifs et la simulation purement élastique nous donne la distribution de la composante $\sigma_{22}^{\text{el}}(x_1)$ du champ de contrainte

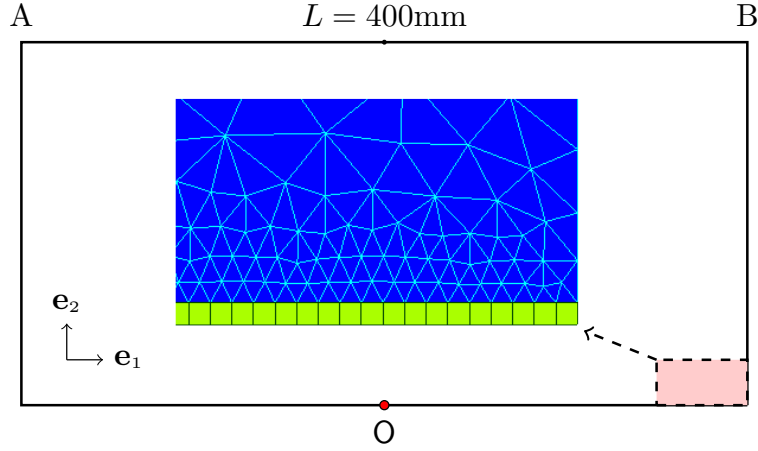


FIGURE 3.10 – Maillage régulier de la structure avec une zone des éléments cohésifs d'interface posée sur la ligne de symétrie

le long de l'axe $x_2 = 0$ correspondant à $t = 1$. Cette fonction de x_1 maximise à l'origine $x_1 = 0$. Dans un petit voisinage de l'origine **O**, par exemple $x_1 \in [-25, 25](\text{mm})$, la distribution de contrainte peut être approximée par une fonction quadratique suivante

$$\sigma_{22}^{\text{el}}(x_1) = \sigma_{22}^{\text{el}}(0) \left(1 - \frac{x_1^2}{\ell^2}\right)$$

où ℓ désigne la longueur caractéristique liée au gradient du champ de contrainte. Dans cette simulation, $\sigma_{22}^{\text{el}}(0) \approx 1,2 \cdot 10^3 \text{MPa}$ et $\ell \approx 175 \text{mm}$. Notons que la valeur numérique de ℓ est beaucoup plus grande que la longueur caractéristique du matériau d_c . La distribution du champ de contrainte et la fonction quadratique approximative sont représentée dans la figure 3.11. Par la linéarité du problème élastique, cela induit la distribution $\sigma_{22}^{\text{el}}(t)(x_1)$ à l'instant $t > 0$ avant l'initiation de fissure $\sigma_{22}^{\text{el}}(t)(x_1) = t\sigma_{22}^{\text{el}}(x_1)$. On peut calculer l'instant critique t_e correspondant à l'initiation de fissure cohésive à l'origine lorsque la contrainte normale à ce point atteint σ_c

$$t_e = \frac{\sigma_c}{\sigma_{22}^{\text{el}}(0)}$$

Au delà du chargement t_e , la structure bidimensionnelle contient une fissure horizontale centrée dans un voisinage de l'origine **O**.

3.3.2 Branche purement cohésive

Considérons une fissure purement cohésive de longueur $2a$ à l'instant $t > t_e$. La simulation avec *Code_Aster* nous permet d'étudier l'évolution de la longueur et l'ouverture de fissure au cours du temps. Afin de faciliter la comparaison avec le résultat analytique présenté dans (2.27), on trace dans la figure 3.12 la relation entre la demi-longueur de la fissure a et la grandeur sans dimension $\sqrt{1 - t_e/t}$. Cette relation affine est parfaitement cohérente avec le résultat analytique. En plus, en étudiant la pente de cette droite, on retrouve la valeur numérique de la longueur

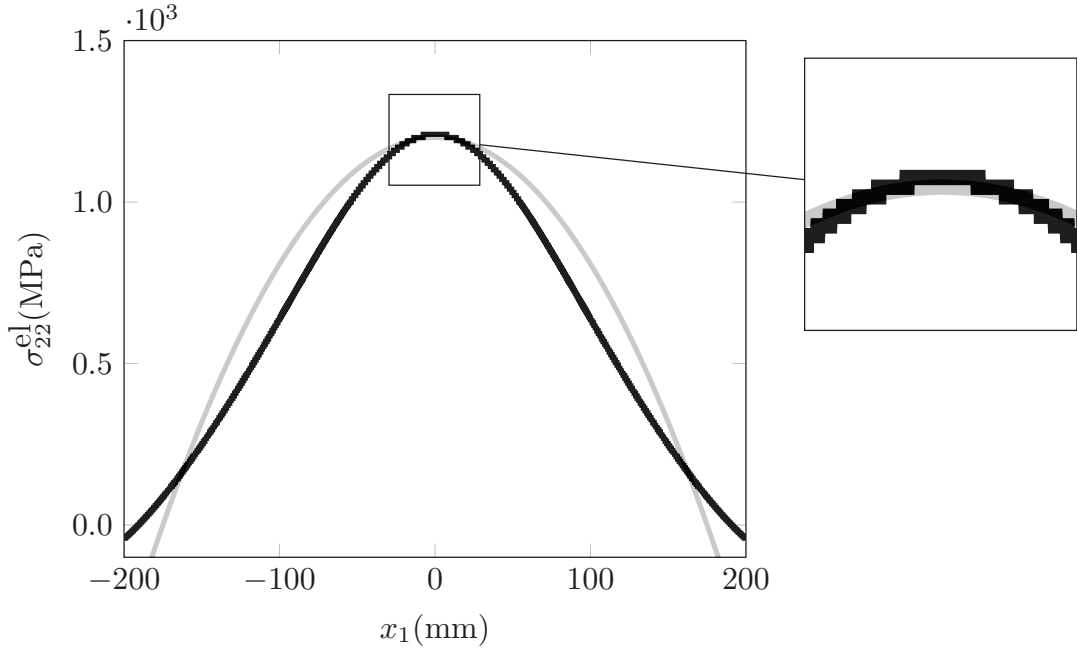


FIGURE 3.11 – Distribution de la contrainte normale le long de l'axe $x_2 = 0$ et la fonction quadratique approximative

caractéristique liée au gradient de contrainte $\ell \approx 175\text{mm}$ que l'on a obtenue lors de la simulation élastique.

Après avoir calculé numériquement la valeur de la longueur caractéristique et l'évolution de la longueur de fissure, on a tous les ingrédients pour construire la formulation analytique du saut de déplacement normal le long de la fissure à chaque instant t comme suit (voir l'équation (2.30))

$$\llbracket u(t)_2 \rrbracket(x_1) = \frac{8}{3}(1 - \nu^2) \frac{\sigma_c}{E} a(t) \left(\frac{t}{t_e} - 1 \right) \left(1 - \frac{x_1^2}{a(t)^2} \right)^{3/2} \quad (3.30)$$

Il faut remarquer que la formulation du saut de déplacement le long de la fissure *purement cohésive* ne dépend que des paramètres du comportement élastique, du chargement t et de la contrainte critique σ_c , mais pas de la valeur de G_c (ou de manière équivalente, de δ_c). Autrement dit, le choix de la valeur de G_c n'influence pas notre analyse numérique lorsque la fissure est purement cohésive. La simulation avec *Code_Aster* nous donne l'évolution de profil du saut de déplacement normal le long de la fissure cohésive au cours du temps. La figure 3.13 montre quatre profils du saut de déplacement le long de la fissure correspondant à quatre instants choisis donnés par la simulation avec *Code_Aster* en comparant avec la solution analytique (3.30). Donc, les résultats concernant l'évolution de la longueur et du saut de déplacement normal de la fissure purement cohésive sont bien vérifiés. Évidemment, cette solution est valable jusqu'à ce que le saut de déplacement normal au centre de la fissure atteigne la valeur critique cohésive δ_c .

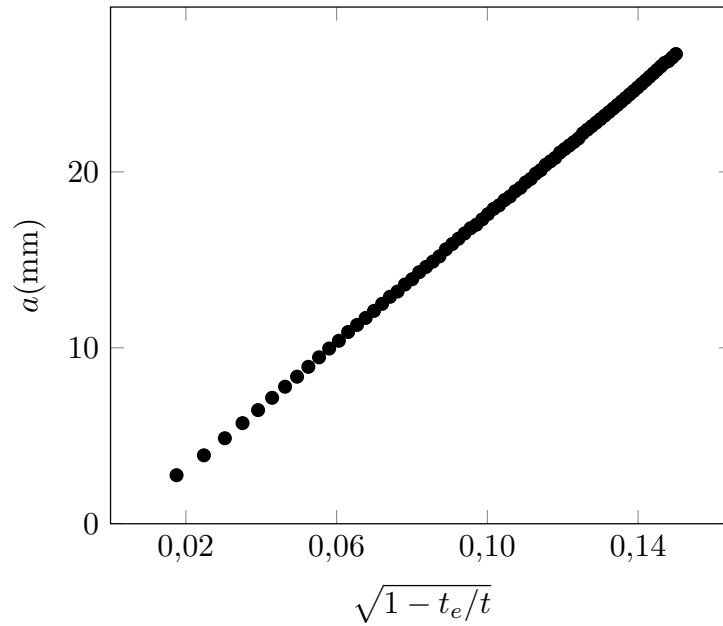


FIGURE 3.12 – Évolution de la longueur de la fissure

3.3.3 Branche partiellement non cohésive

Lorsque le saut de déplacement normal au centre de la fissure atteint δ_c , le paramètre de chargement t vaut t_i et la partie non cohésive s'initie à l'origine **O**. Néanmoins, la simulation ne peut pas être convergente dès l'apparition de la partie non-cohésive, *i.e.* dès le début de la branche partiellement non-cohésive, même si le pilotage du chargement présenté dans l'introduction est mis en place. Cela vient du fait que la longueur et le saut de déplacement normal devraient sauter brutalement à cet instant. Cette évolution discontinue de la fissure a été discutée dans le chapitre 2 des calculs analytiques. En effet, le snap-back de la courbe mi-longueur de la fissure-paramètre de chargement $a(t)$ et le principe d'irréversibilité conduit à un saut brutal de a à l'instant t_i (voir la remarque 16 du chapitre 2).

3.4 Conclusion du chapitre

On a abordé dans ce chapitre la partie numérique de la thèse. D'une part, la simulation numérique utilisant le modèle de zone cohésive sur une structure bidimensionnelle élastique soumise à un chargement non uniforme nous permet de valider des résultats analytiques présentés dans le chapitre 2. Les évolutions de la longueur et l'ouverture de la fissure sous l'effet du gradient du champ de contrainte pendant la phase purement cohésive, où toute la fissure est soumise à des forces cohésives, calculées numériquement sont parfaitement cohérentes avec les courbes analytiques. Néanmoins, lorsque l'ouverture au centre de la fissure atteint la valeur critique δ_c , la zone non cohésive apparaît et la longueur de la fissure devrait sauter brutalement à cet instant. Le saut brutal conduit à la non-convergence inévitable de la simulation numérique. D'autre part,

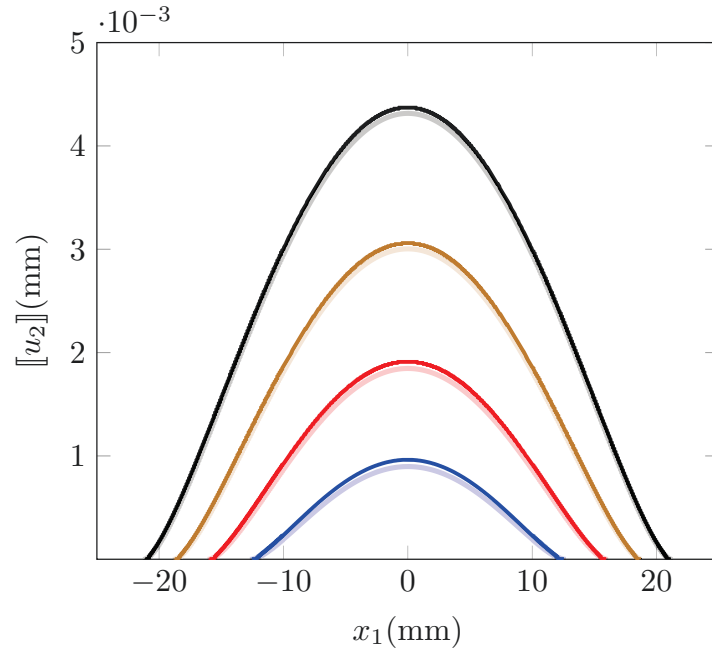


FIGURE 3.13 – Profils du saut de déplacement le long de la fissure correspondant à quatre instants choisis donnés par la simulation avec *Code_Aster* en comparant avec la solution analytique

l'implémentation du critère d'initiation de fissure cohésive sous la forme d'une courbe cohésive intrinsèque dans le post-traitement élastoplastique nous aide à identifier la position du site d'amorçage au sein des différentes structures. Les simulations utilisant ce post-traitement montrent des effets importants de la structure et la triaxialité du champ de contrainte sur l'amorçage de la fissure. De plus, la propagation de la fissure cohésive en mode mixte est simulée numériquement grâce aux formulations énergétiques de Talon-Curnier généralisées dans ce chapitre en prenant en compte le couplage entre deux modes de fissuration. L'utilisation des formulations dans le code d'élément fini est visualisée par une simulation d'arrachement d'une armature rigide. En utilisant des éléments du modèle cohésif présentée dans ce chapitre, on considérera dans le chapitre suivant un cas d'application industrielle concernant l'évolution de la fissure dans une structure tridimensionnelle MU-3. Des résultats numériques prometteurs et avantageux en comparant avec des essais expérimentaux nous permettent d'obtenir une vision plus concrète de l'utilisation du modèle cohésif dans l'ingénierie.

Chapitre 4

Cas d'application industriel

Sommaire

4.1	Introduction	126
4.2	Essais expérimentaux	127
4.2.1	Description de la maquette de grandes dimensions	127
4.2.2	Installation de l'essai de flexion 4 points	127
4.2.3	Réponse globale de la maquette	128
4.3	Simulation numérique utilisant le modèle de zone cohésive	130
4.3.1	Maillage avec éléments cohésifs d'interface	130
4.3.2	Mise en œuvre de la simulation numérique	130
4.3.3	Résultats de la simulation numérique	131
4.4	Conclusion du chapitre	134

Objectifs du chapitre

L'objectif de ce chapitre est d'étudier expérimentalement et numériquement l'évolution en régime ductile de la fissure au sein d'une structure industrielle de grandes dimensions. Le matériau pour ces études est un acier ferritique faiblement allié. La structure se présente sous la forme d'un tronçon de tuyauterie revêtue d'alliage d'acier inoxydable. Dans une première phase, des essais expérimentaux sur de différentes éprouvettes normalisées sont mis en œuvre à la température ambiante afin d'identifier les paramètres du matériau. Ensuite, l'essai de flexion 4 point est réalisé sur la maquette de grandes dimensions. Dans une seconde phase, les analyses numériques se basant sur le modèle de zone cohésive sont réalisés afin de s'approcher de la réponse globale force appliquée-ouverture de fissure donnée par l'essai expérimental. Dans ce chapitre, on présente rapidement des résultats principaux les essais expérimentaux et on détaille la simulation numérique avec l'approche cohésive. Les évolutions de la fissure et de la zone plastifiée sont étudiées en se comparant avec les résultats expérimentaux sur la maquette de grandes dimensions en déchirure ductile.

4.1 Introduction

La justification de la bonne tenue mécanique des structures industrielles requiert la connaissance solide des propriétés mécaniques des matériaux considérés. Ces propriétés sont habituellement obtenues à partir d'essais mécaniques sur des éprouvettes de la mécanique de la rupture normalisées de petites dimensions garantissant généralement le conservatisme de ces données (les données les plus pénalisantes étant obtenues sur les éprouvettes de petites dimensions). La transposition des propriétés mécaniques mesurées sur éprouvettes aux structures («transférabilité éprouvettes – structures») est un problème récurrent et générique, quelque soit le mode de rupture considéré (clivage, transition clivage – ductile, ductile). Les différences de comportement observées entre éprouvettes et structures sont généralement attribuées à divers facteurs tels que la taille et géométrie des éprouvettes, la nature du chargement (flexion, traction, etc.), la niveau de triaxialité et le domaine de température considéré. Des modèles numériques micro-mécaniques ont été développés et implantés dans divers codes d'élément fini pour rendre compte de ces effets, en clivage présentés dans les travaux de [Beremin et al., 1983; Bordet et al., 2006; Gao et al., 1999] et en déchirure ductile étudiés dans [Rousselier, 1986; Gurson, 1977; Needleman et Tvergaard, 1984]. Néanmoins, l'utilisation des modèles pour simuler l'évolution de fissure au sein des grandes structures présente des difficultés importantes. D'une part, la plupart de ces modèles ne permettent pas de mener à terme la simulation dans laquelle la longueur de la fissure est assez grande et la non-linéarité géométrique est non négligeable. D'autre part, la mise en place des modèles numériques micro-mécaniques nécessite l'identification d'un grand nombre de paramètres et une construction de maillage très délicate. Par ailleurs, le modèle de zone cohésive, s'appuyant sur le comportement à l'échelle macroscopique du matériau, présente des avantages remarquables en fiabilité et en robustesse des calculs numériques, ce qui nous permet d'obtenir des résultats prometteurs en comparant avec des essais expérimentaux.

Un effort important a été engagé ces dernières années à EDF sur la thématique «transférabilité» dans le domaine de la déchirure ductile, s'appuyant sur une contribution expérimentale significative sur des éprouvettes normalisées et des structures de grandes dimensions, et également les simulations numériques correspondantes. Ce travail, basé sur le modèle cohésif, a été mené dans le cadre du projet européen STYLE (essai de déchirure ductile sur une tuyauterie de grandes dimensions). L'acier retenu pour ces études est l'acier ferritique faiblement allié. En comparant avec des essais sur les éprouvettes normalisées, des simulations numériques permettent d'identifier les données intrinsèques du matériau élastoplastique, dont le module Young, la limite d'élasticité, la courbe de traction élastoplastique, et également de différents paramètres des modèles de fissuration, dont la contrainte critique et l'énergie surfacique de fissure du modèle de zone cohésive. Ensuite, la simulation numérique utilisant les paramètres identifiés et les éléments cohésifs d'interface est mise en place pour étudier l'évolution de fissure au sein de la structure industrielle. Le chapitre exploite l'utilisation du modèle de zone cohésive implémenté dans *Code_Aster* dans ce cas concret, ce qui permet de simuler les différentes phases de propagation de fissure au sein de la structure de comportement élastoplastique. On considère aussi l'évolution de la zone plastifiée de la structure et les influences de cette zone sur la fissure. Les avantages mais également les challenges du modèle en pratique d'ingénierie sont discutés. A partir de ces différents points de vue, des améliorations de l'utilisation du modèle pour les études de déchirure ductile sont proposées.

Le chapitre est présenté de la façon suivante. Dans la première partie, des essais expérimentaux réalisés au sein du département MMC-EDF (voir [Roirand et al., 2014]) sont exposés rapidement. Des données du matériaux, l'installation des dispositifs expérimentaux et également la réponse globale force appliquée- ouverture de la fissure obtenue par l'expérimentateur sont présentées. La partie suivante du chapitre est consacrée à notre étude numérique, en utilisant le modèle de zone cohésive. Des résultats numériques sont comparés à avec la courbe expérimentale tout le long du chapitre.

4.2 Essais expérimentaux

4.2.1 Description de la maquette de grandes dimensions

Dans le cadre du projet STYLE, une tuyauterie revêtue en acier ferritique faiblement allié est utilisée. La présence d'une couche de revêtement inoxydable en paroi interne de la tuyauterie, qui assure une protection de l'acier ferritique contre la corrosion, modifie significativement le comportement de la pièce dans les premiers millimètres de l'épaisseur de la tuyauterie, *i.e.* dans la zone affectée thermiquement gérée lors du dépôt du revêtement. Ce tronçon est représentatif des tuyauteries de la ligne d'expansion du pressuriseur des réacteurs PWR Allemands. Le tableau 4.1 montre l'analyse chimique de l'acier du tronçon utilisé dans notre étude. Lors de les essais expérimentaux réalisés par MMC-EDF, la maquette MU-3 contient le tronçon revêtu et deux cylindres d'extension en acier ferritique. Les dimensions de la maquette sont données dans la figure 4.1.

TABLE 4.1 – Analyse chimique de l'acier du tronçon

	C	S	P	Si	Mn	Cr	Ni	Mo	V	Cu	Al
%masse	0,19	0,003	0,006	0,26	1,63	0,1	0,93	0,51	\	0,13	0,02

4.2.2 Installation de l'essai de flexion 4 points

La maquette comporte un défaut semi-elliptique circonférentiel débouchant situé sur la surface interne revêtue (cf. figure 4.2). En mettant place la maquette dans l'essai de flexion 4 point à la température ambiante, l'expérimentateur fait propager la fissure de manière ductile radialement dans une première phase jusqu'au percement du tuyau puis circonférentiellement dans une seconde phase. L'installation de l'essai de flexion 4 points sur la maquette est montrée dans la figure 4.2. Les supports sont encastrés et le déplacement *monotone* des vérins est imposé au cours d'essai. Un capteur de force est posé sur une extrémité du vérin. L'expérimentateur installe une série de jauges de déplacement sur la surface intérieure du tuyau afin de mesurer l'ouverture de la fissure en supposant que la fissure est toujours en mode I et se propage toujours dans le même plan. La figure 4.2 montre également l'évolution du défaut au sein du tuyau revêtu.

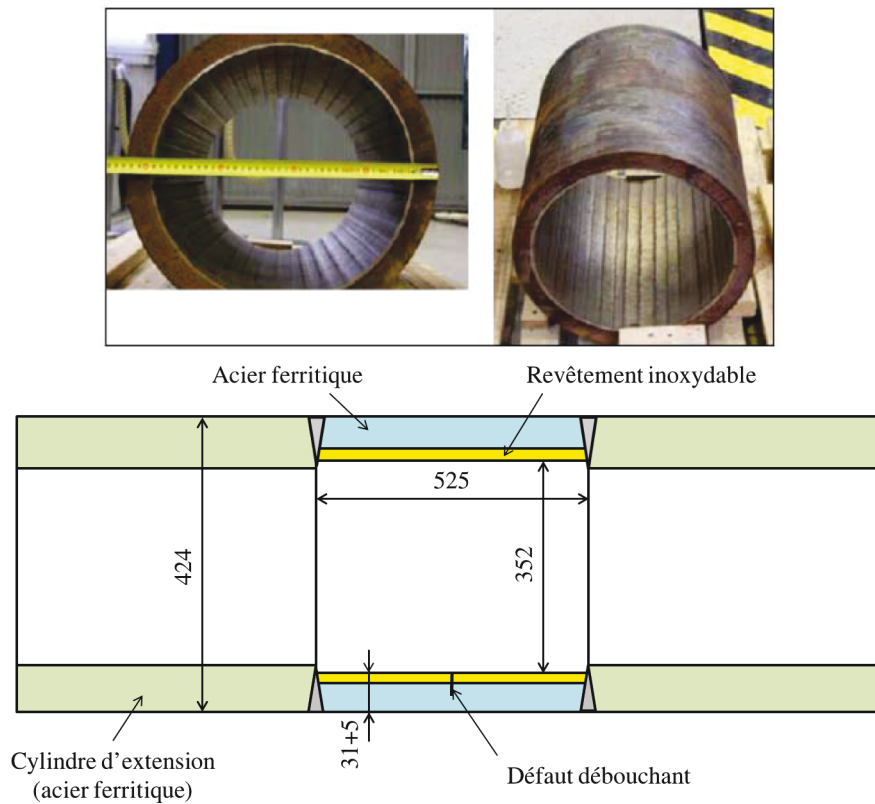


FIGURE 4.1 – Maquette MU-3 avec son tronçon central revêtu en paroi interne

4.2.3 Réponse globale de la maquette

La réponse globale force appliquée (mesurée par le capteur à l'extrémité du vérin) - ouverture de fissure (mesurée par le capteur au point débouchant à l'intérieur du tuyau, cf. figure 4.2) est montrée dans la figure 4.3. On observe que dans une première phase, même si la fissure se propage radialement, le comportement élastique linéaire de la structure hors de la fissure domine et la réponse globale est quasi-linéaire. Dans une deuxième phase, la réponse globale devient durcissante. Ceci est dû à l'effet de l'écrouissage plastique du matériau. Lorsque l'avancement radial de la fissure au sein de la structure est assez importante, la réponse globale de la maquette MU-3 est adoucissante, *i.e.* la force appliquée aux vérins diminue tandis que le déplacement imposé des vérins et l'ouverture de fissure continuent à augmenter. Cette phase se termine lorsque le fond de la fissure atteint le bord du ligament du tuyau, et puis la fissure se propage circonférentiellement dans la paroi du tronçon. Cette phase correspond au plateau quasi-horizontale dans la courbe force appliquée-ouverture de fissure, ainsi la force appliquée aux vérins varie assez peu lors de la phase de propagation circonférentielle de fissure. L'essai s'arrête au moment où la fissure se propage brutalement, *i.e.* la force mesurée par le capteur à l'extrémité du vérin chute brutalement lorsque l'on continue à augmenter le déplacement imposé des vérins.

Cet essai de flexion 4 points réalisé sur la maquette de grandes dimensions MU-3 impose de

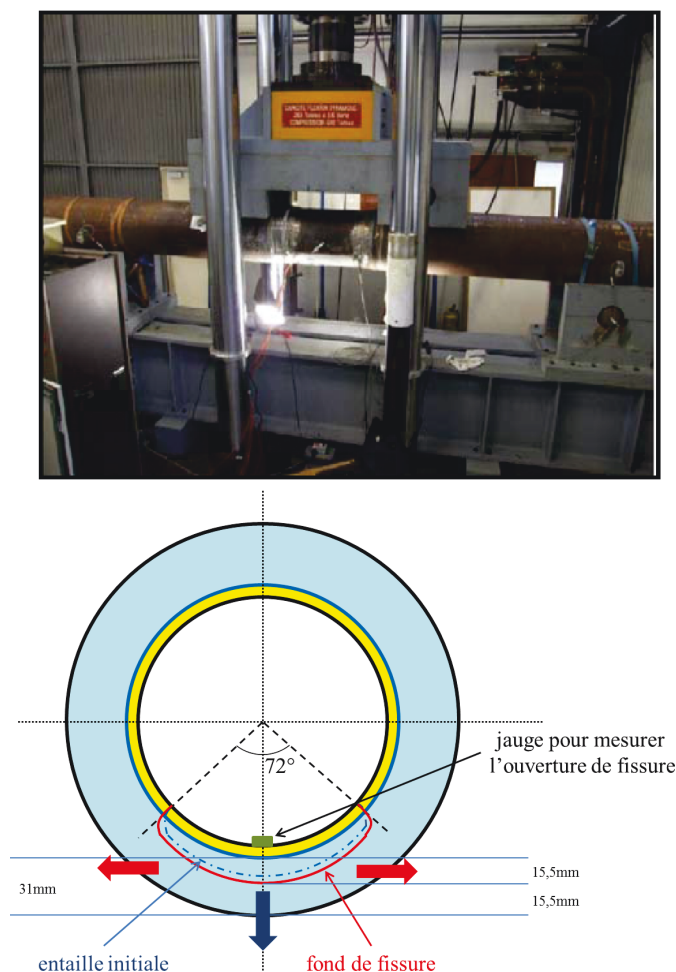


FIGURE 4.2 – Installation de l'essai de flexion 4 points sur la maquette et évolution du défaut au sein du tuyau

grands challenges pour la simulation numérique. D'une part, du fait que la longueur et l'ouverture de la fissure sont très importantes (*i.e.* au delà de quelques millimètre) dans la structure tridimensionnelle, certains modèles de fissuration micromécaniques ont beaucoup de difficultés pour mener à terme la simulation et leurs résultats sur la réponse globale force appliquée-ouverture de fissure ne sont pas satisfaisants. D'autre part, le passage de la propagation radiale à la propagation circonférentielle de fissure induit certaines instabilités, *i.e.* la fissure se propage brutalement à certains points. Par conséquent, la mise en œuvre de la technique de pilotage que l'on a considérée dans le chapitre précédent est très délicate et nécessite beaucoup d'attention pour assurer la convergence de simulation. En plus, le rôle de la plasticité est non-négligeable dans cet essai de déchirure ductile. En prenant conscience de toutes ces difficultés, on obtient dans la section suivante du chapitre des résultats encourageants du modèle de zone cohésive pour la simulation sur la maquette.

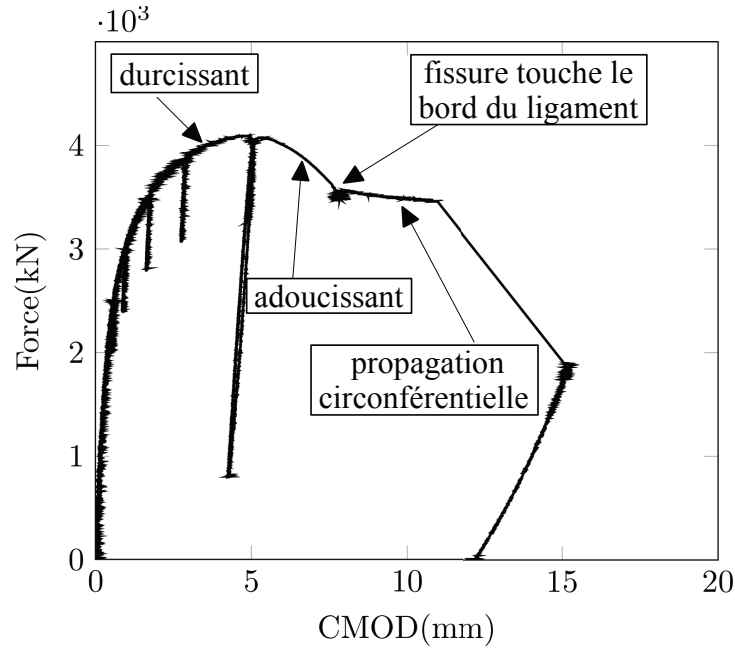


FIGURE 4.3 – Réponse globale force appliquée-ouverture de fissure au cours d'essai

4.3 Simulation numérique utilisant le modèle de zone cohésive

4.3.1 Maillage avec éléments cohésifs d'interface

Par symétrie, on met en place dans la simulation seulement un quart du tuyau en utilisant le modèle tridimensionnel dans notre simulation. Hors de la fissure, la structure élastoplastique est maillée régulièrement avec l'interpolation quadratique. Afin de simuler l'évolution de la fissure au sein de la structure, une seule couche de très petite épaisseur d'éléments cohésifs d'interface est posée sur le plan de propagation potentiel de fissure. L'utilisation des éléments cohésifs d'interfaces est considérée dans le chapitre 3. L'épaisseur de la couche cohésive dans ce cas concret est choisi de 0,3 mm. Le maillage de cette couche d'éléments d'interface, ainsi de la partie volumique dans son voisinage, doit être très fin pour représenter correctement l'évolution de la zone cohésive. La figure 4.4 montre le maillage du quart de la maquette avec la couche d'éléments cohésifs d'interface. Par convention de simulation numérique, l'axe du cylindre est coïncide à l'axe Z et le chargement est selon l'axe Y.

4.3.2 Mise en œuvre de la simulation numérique

Du fait que la fissure est toujours en mode I, à côté des données du comportement élastoplastique (module Young E , coefficient de Poisson ν , limite d'élasticité σ_y , courbe contrainte-déformation élastoplastique), deux paramètres du modèle de zone cohésive doivent être fournis par l'utilisateur : contrainte critique cohésive σ_c et l'énergie surfacique de fissuration G_c . Dans la pratique, les données du comportement élastoplastique sont identifiées grâce aux résultats expé-

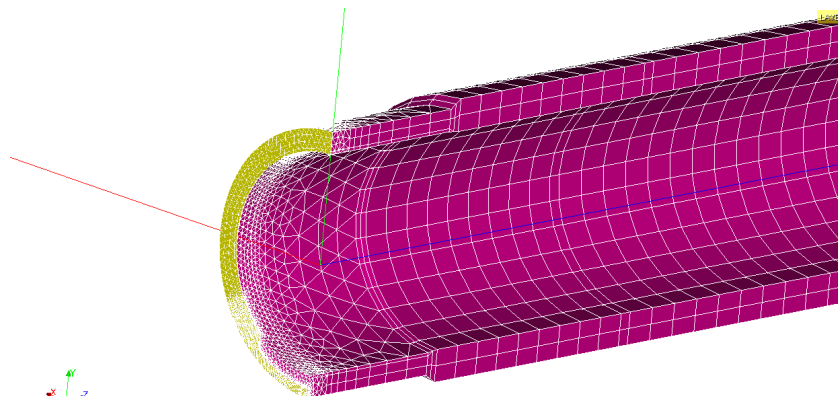


FIGURE 4.4 – Maillage de la maquette MU3 avec la couche d'éléments cohésifs d'interface

rimementaux de traction simple et sur des éprouvettes normalisées AE et CT. Ces essais permettent également d'estimer approximativement les valeurs du couple (σ_c, G_c) du modèle de zone cohésive. La simulation est réalisée en utilisant plusieurs couples de valeurs (σ_c, G_c) pour l'objectif de suivre au mieux la réponse globale sur la maquette MU-3 donnée par l'essai expérimental.

Lors de notre simulation numérique sur la maquette MU-3, la partie volumique de la structure hors de la fissure est modélisée avec le comportement de plasticité de Von-Mises. La loi cohésive de type trapèze est utilisée afin de simuler la déchirure ductile de la maquette. La relation entre la contrainte normale cohésive et l'ouverture de fissure en mode I de cette loi est présentée dans la figure 4.5. L'aire sous la courbe est G_c . Par ailleurs, le pilotage en ouverture de fissure au point débouchant à l'intérieur du tuyau est mis en place lors de la simulation de fissure. Plus de détails de la technique de pilotage ont été présentés dans le chapitre 3.

Pendant la simulation de la déchirure ductile, l'apparition de déformations importantes est inévitable et l'hypothèse de petites perturbations n'est plus pertinente. Notre simulation consiste à approximer les formulations de grandes déformations par la réactualisation de la géométrie du problème au cours des itérations de Newton (et non à la fin de chaque pas de temps). Ceci signifie que toutes les quantités intervenant dans les équations du problème sont évaluées sur la configuration actuelle.

4.3.3 Résultats de la simulation numérique

On présente des résultats numériques concernant la propagation radiale, puis circonférentielle de la fissure pour le couple de valeurs suivantes du modèle de zone cohésive : $\sigma_c = 1800\text{MPa}$, $G_c = 300\text{MPa.mm}$. Ces valeurs sont estimées grâce aux essais expérimentaux et aux simulations numériques sur les éprouvettes normalisées AE et CT. Les résultats numériques sont comparés à l'essai expérimental. L'évolution du fond de la fissure et de la zone plastifiée dans la structure est mise en évidence.

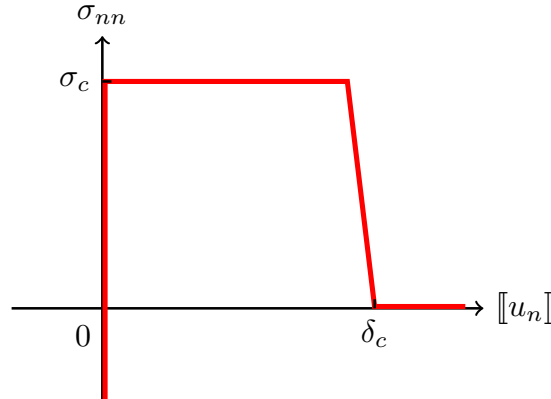


FIGURE 4.5 – Loi cohésive de type trapèze

4.3.3.1 Propagation radiale de la fissure

La figure 4.6 nous montre une visualisation du champ de déplacement selon Y à un instant choisi de l'essai de flexion 4 points. Cet instant correspond à l'ouverture de 10 mm du point débouchant à l'intérieur du tuyau. Le déplacement selon Y est évidemment négatif dans la zone entre deux supports et positif hors de cette zone. Par ailleurs, la zone supérieure du tuyau est en compression et la zone inférieure du tuyau est en traction. Cette traction fait propager la fissure au sein de la maquette tridimensionnelle. Le fond de la fissure correspondant à l'ouverture de 10 mm du point débouchant à l'intérieur du tuyau est également montré dans la figure 4.6. Le modèle de zone cohésive montre son avantage en nous permettant d'étudier l'évolution de la fissure avec la surface de discontinuité. Une striction avec une déformation importante est observée dans la section de la fissure.

Afin de mieux appréhender la propagation de la fissure au sein de la structure, on devrait étudier l'évolution de la couche d'éléments cohésifs qui lie les lèvres de la fissure. Cette couche, adoptant la loi cohésive de type trapèze, s'ouvre et se propage au fur et à mesure du chargement. La figure 4.7 nous montre le profil de cette couche déformée correspondant à trois instants choisis (autrement dit, trois valeurs de l'ouverture de fissure au point débouchant à l'intérieur du tuyau) pendant la propagation radiale de la fissure. Le profil de cette couche respecte la condition de continuité du saut de déplacement et également la condition de non-singularité en pointe de la fissure (reliée à la dérivée du saut de déplacement normal en Y à ce point). On remarque qu'une large zone du fond de la fissure est quasi-parallèle au bord extérieur du tuyau et cette zone pourrait s'ouvrir quasi-instantanément si on continue à augmenter le chargement à la fin de phase de propagation radiale. Ce phénomène complexifie la convergence de la simulation lors du passage de la propagation radiale à la propagation circonférentielle de fissure.

Dans notre analyse de déchirure ductile, l'effet de la plasticité joue un rôle fondamental. En effet, pendant toute la phase de propagation de fissure, le voisinage de la fissure est plastifiée. En plus, la zone inférieure du tuyau est plastifiée en traction mais la zone supérieure du tuyau est plastifiée en compression. L'évolution de la configuration des zones élastiques-plastifiées est étudiée grâce à une variable d'indicateur qui vaut 0 pour la zone élastique et 1 pour la zone

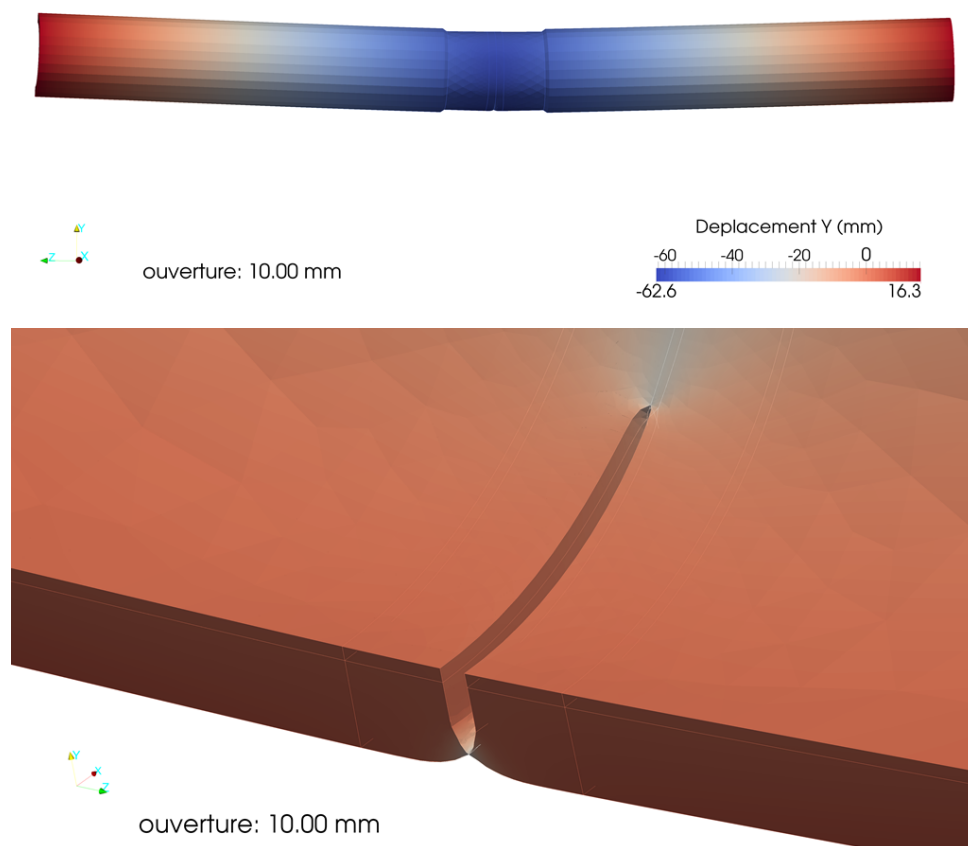


FIGURE 4.6 – Champ de déplacement selon Y et fond de fissure au sein de la structure dans la phase de propagation radiale

plastifiée (cf. figure 4.8). Par ailleurs, une forte concentration de plasticité est observée dans le ligament devant le fond de la fissure. La figure 4.8 montre le champ de déformation plastique cumulée dans un voisinage de la fissure correspondant à l'ouverture de fissure de 10,2 mm du point débouchant à l'intérieur du tuyau. A cet instant, la déformation plastique cumulée devant le fond de fissure atteint la valeur de 200% qui est beaucoup plus grande que dans d'autres zones.

La comparaison des réponses globales de l'essai expérimental et la simulation utilisant le modèle cohésif avec un couple (σ_c, G_c) choisi est présentée dans la figure 4.9. On obtient des résultats encourageants dans la première phase quasi-linéaire et la phase durcissante de la réponse globale, malgré la sous-estimation de valeur maximale de la force appliquée. La phase adoucissante de la réponse globale lorsque la longueur de la fissure est importante est également captée. Le calcul confirme notre analyse sur la difficulté de convergence quand la fissure touche le bord extérieur du tuyau, *i.e.* lors du passage de la propagation radiale à la propagation circonférentielle de fissure. Certaines stratégies pourraient être mises en place pour suivre l'évolution de la fissure en propagation circonférentielle : introduction d'éléments plus «souples» au bord extérieur du

ligament, utilisation d'autres techniques de pilotage, utilisation de la matrice sécante à la place de la matrice tangente dans l'algorithme de Newton, etc.

4.3.3.2 Propagation circonférentielle de la fissure

La difficulté de la convergence en phase de propagation circonférentielle de la fissure est surmontée grâce à la technique des matrices sécantes de l'algorithme Newton. Par conséquent, on peut mener à terme la simulation de l'évolution de la fissure dans la structure de grandes dimensions avec des résultats prometteurs. La figure 4.10 nous montre le tuyau percé et la fissure propageant circonférentiellement. La striction du ligament peut être observée clairement.

La figure 4.11 nous permet de mettre en lumière l'évolution de la couche d'éléments cohésifs déformée liant les lèvres de la fissure dans la phase de propagation circonférentielle. Ceci montre la fin de la phase de propagation radiale de la fissure, ensuite deux instants de l'évolution circonférentielle de la fissure dans la structure.

Finalement, on compare la réponse globale force appliquée - ouverture de fissure sur toute la simulation avec l'essai expérimental (cf. figure 4.12). L'accord entre les résultats numérique et expérimental est remarquable. En particulier, le plateau horizontal après la partie adoucissante de la courbe de réponse globale est bien obtenu pour une ouverture du point débouchant à l'intérieur du tuyau supérieure à 11,2 mm. On remarque que la propagation circonférentielle commence lorsque l'ouverture du point débouchant à l'intérieur du tuyau est de 10,3 mm. Ceci est un peu avant le début du plateau sur la courbe de réponse globale. Un recalage des paramètres cohésifs (σ_c, G_c) pourrait donner de meilleurs résultats numériques en comparant avec la courbe expérimentale. Par ailleurs, l'utilisation d'une cinématique en grandes déformations est envisagée pour mieux capter le pic de la contrainte appliquée.

4.4 Conclusion du chapitre

On a présenté dans ce chapitre des résultats de simulation numériques utilisant le modèle de zone cohésive pour le problème de l'évolution de fissure au sein d'une structure industrielle de grandes dimensions. Le principal l'objectif du travail est de se rapprocher au mieux de la réponse globale expérimentale force appliquée - ouverture de fissure. Le modèle de zone cohésive est un très bon candidat pour ce type de simulation au niveau de simplification d'utilisation, de robustesse et de fiabilité, sachant que la fissure est toujours en mode I et le chemin de fissure est connu *a priori*. En effet, la mise en place des éléments cohésifs d'interface sur le trajet potentiel de fissuration est très facile à réaliser et ne nécessite pas de refaire le maillage de la partie non fissurée. En plus, seulement deux paramètres cohésifs (σ_c, G_c) sont à identifier grâce aux calculs sur des éprouvettes normalisées, avant d'être mis en œuvre dans la simulation sur la structure de grandes dimensions. La courbe de réponse globale obtenue dans la simulation utilisant le modèle de zone cohésive suit de manière très satisfaisante la courbe expérimentale lors de la propagation de la fissure au sein de la maquette. Les phases quasi-linéaire, durcissante, puis adoucissante et finalement le plateau horizontal de la réponse globale sont très bien captées, malgré une sous-estimation de la force appliquée maximale. La concentration de la déformation plastique dans la partie devant le fond de la fissure est mise en lumière grâce à la simulation numérique. Ce champ de déformation influence de manière importante la propagation de la fissure.

Par ailleurs, on a rencontré la difficulté de convergence de calcul lors du passage de la propagation radiale à la propagation circonférentielle de la fissure, *i.e.* quand le fond de la fissure touche le bord extérieur du tuyau. Cette difficulté est due au fait que, quand la fissure s'approche du bord extérieur du tuyau, le fond de la fissure est quasi-parallèle à ce bord et une très large zone pourrait s'ouvrir quasi-instantanément si on continue à augmenter le chargement. En plus, l'approximation de la grande déformation par la réactualisation géométrique pourraient présenter des limites, du fait que la déformation plastique cumulée peut atteindre la valeur de 200%. Afin de mener à terme la simulation utilisant le modèle cohésif, différentes stratégies doivent être mises en place. En utilisant la matrice sécante à la place de la matrice tangente dans l'algorithme de Newton, la propagation circonférentielle de la fissure dans la structure peut être mise en évidence numériquement. Le résultat numérique est très prometteur et on a bien obtenu le plateau horizontal de la réponse globale force appliquée - ouverture de la fissure. Ainsi, la simulation numérique utilisant le modèle cohésif nous permet d'obtenir toutes les phases de la réponse globale (quasi-linéaire, durcissante, adoucissante, puis plateau horizontal) de manière satisfaisante.

D'autres valeurs du couple (σ_c, G_c) peuvent être envisagées afin de suivre mieux la courbe expérimentale. En plus, on pourrait mettre en place dans notre simulation des modélisations numériques de grandes déformations et comparer avec le résultat de ce chapitre. La loi cohésive de type trapèze a été utilisée dans la simulation en supposant que la fissure est toujours en mode I pur. D'autres types de loi cohésive, en particulier la loi cohésive en mode mixte développée et présentée dans le chapitre précédent, peuvent nous fournir de meilleurs résultats numériques.

On peut envisager également de comparer les résultats numériques encourageants utilisant le modèle cohésif avec d'autres modèles d'endommagement micro-mécaniques proposés par différents équipes de recherche. L'objectif est d'améliorer notre approche pour proposer à l'ingénierie un modèle de fissuration ductile facile à utiliser et qui donne des résultats de simulation fiables.

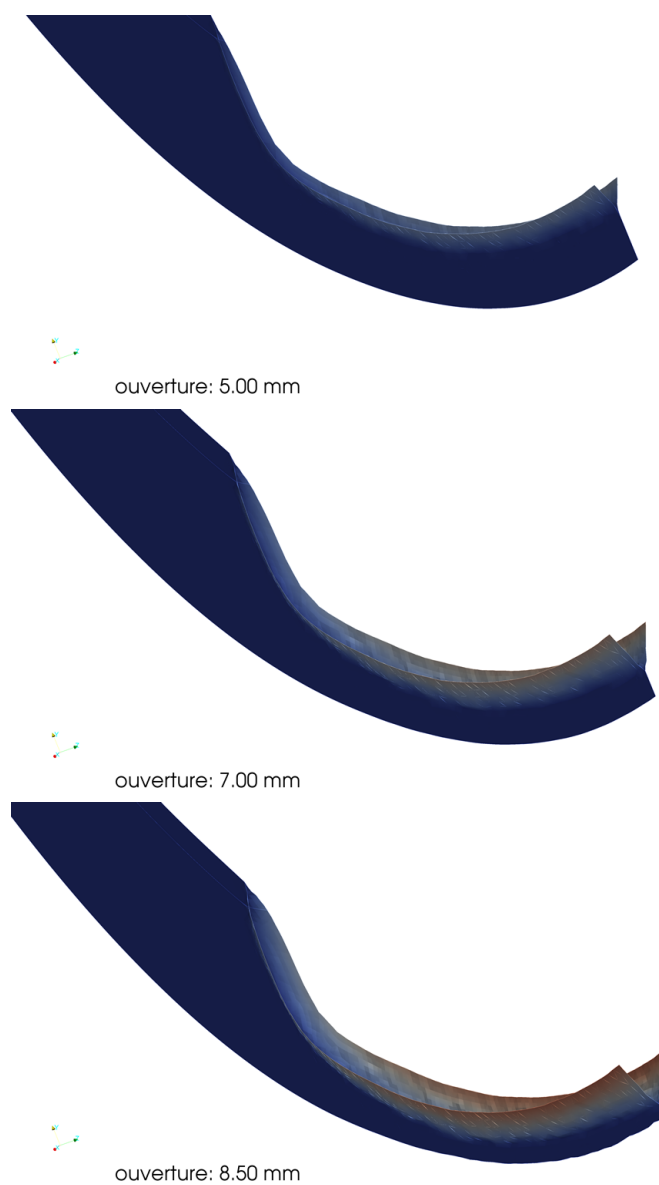


FIGURE 4.7 – Évolution de la couche d'éléments cohésifs déformée dans la phase de propagation radiale de fissure

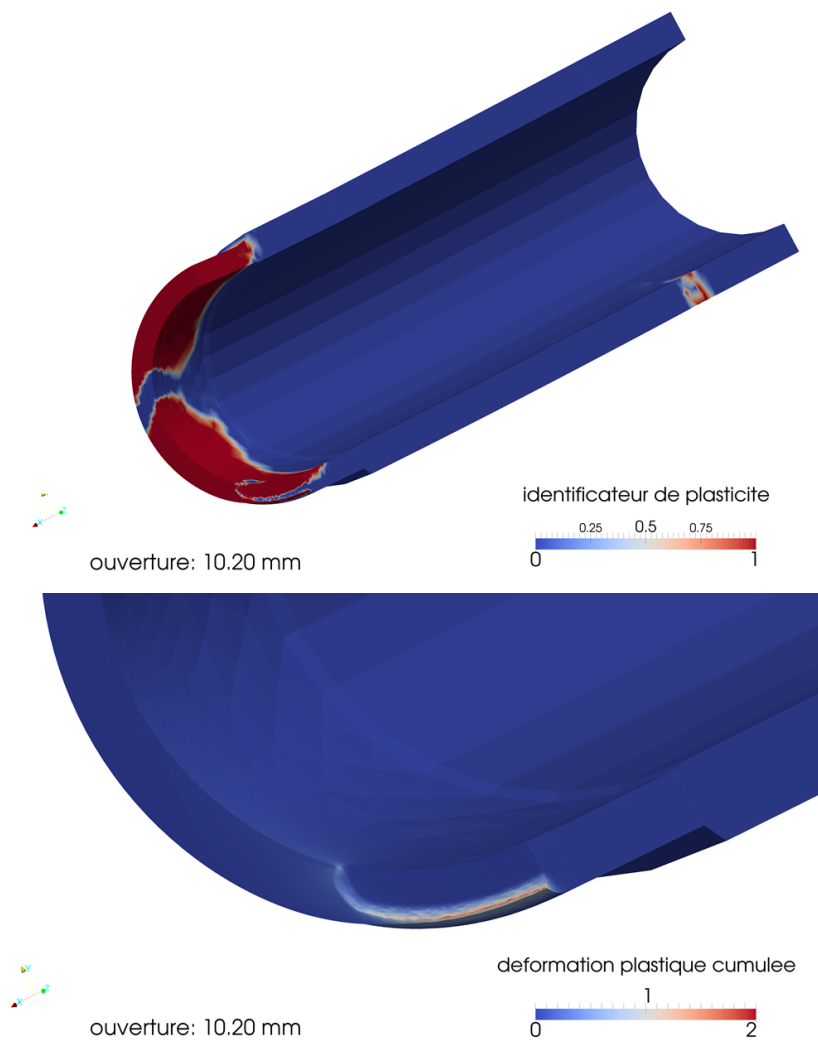


FIGURE 4.8 – Configuration des zones élastiques (bleues)-plastifiées (rouges) et le champ de déformation plastique cumulée

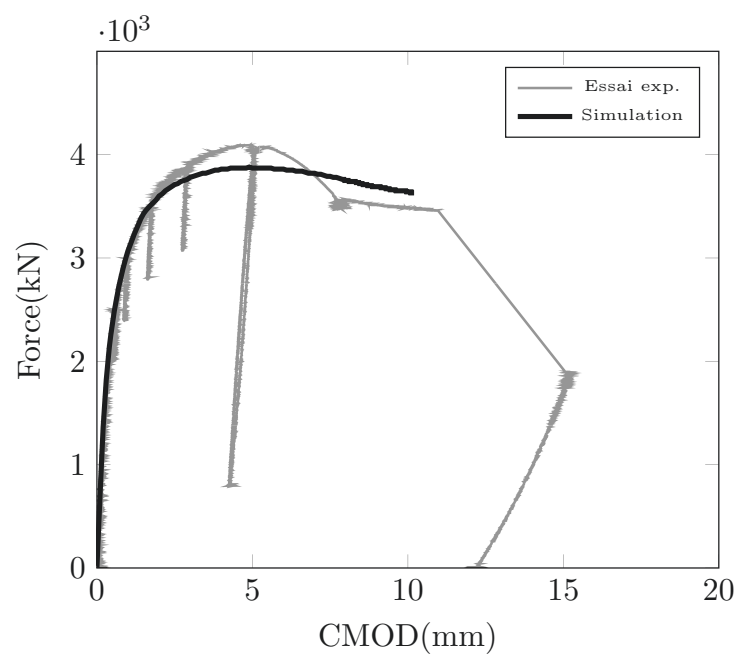


FIGURE 4.9 – Réponse globale force appliquée - ouverture de fissure au cours de la simulation en comparant avec l'essai expérimental

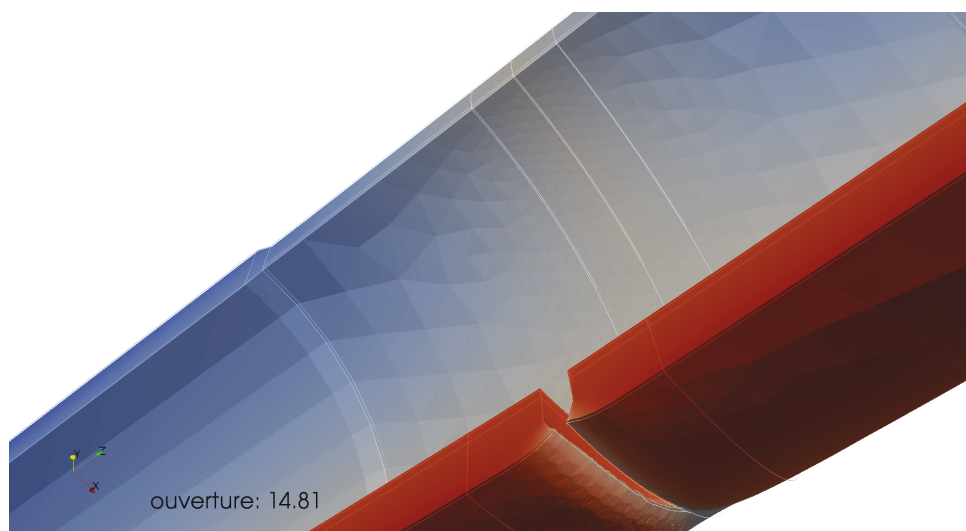


FIGURE 4.10 – Fissure au sein de la structure dans la phase de propagation circonférentielle (la couleur correspond au déplacement selon Y, cf. figure 4.6)

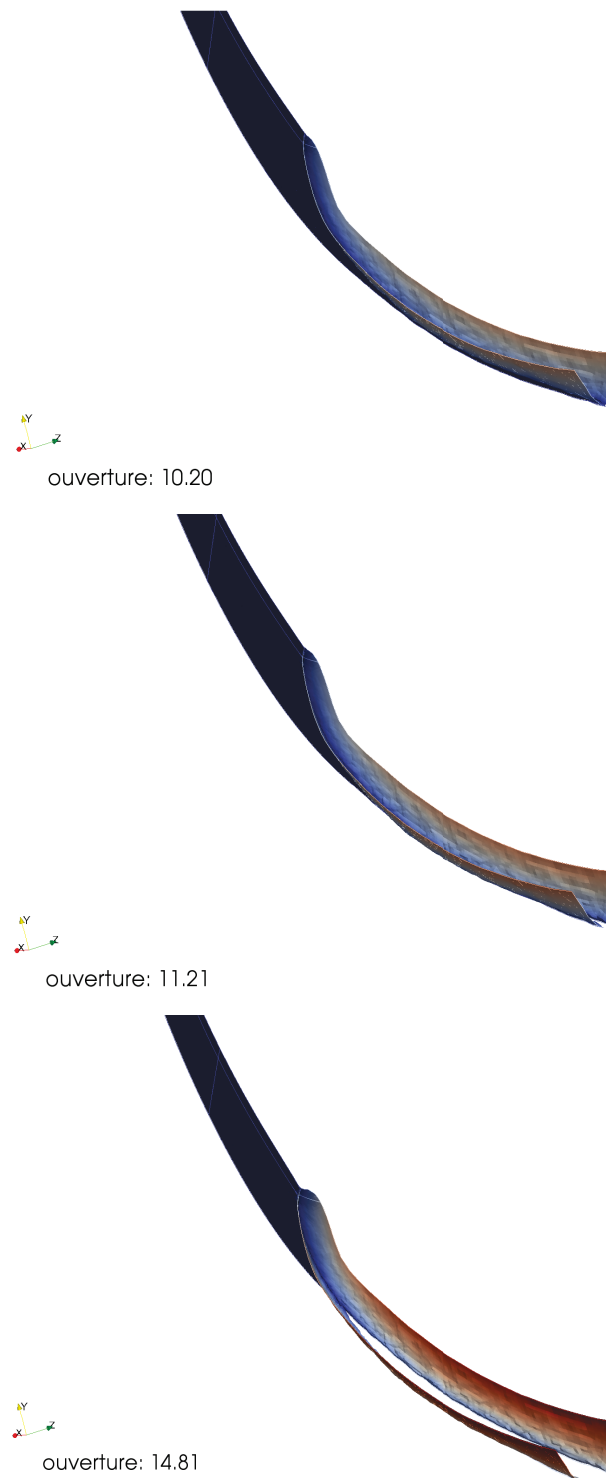


FIGURE 4.11 – Évolution de la couche d'éléments cohésifs déformée dans la phase de propagation circonférentielle de fissure

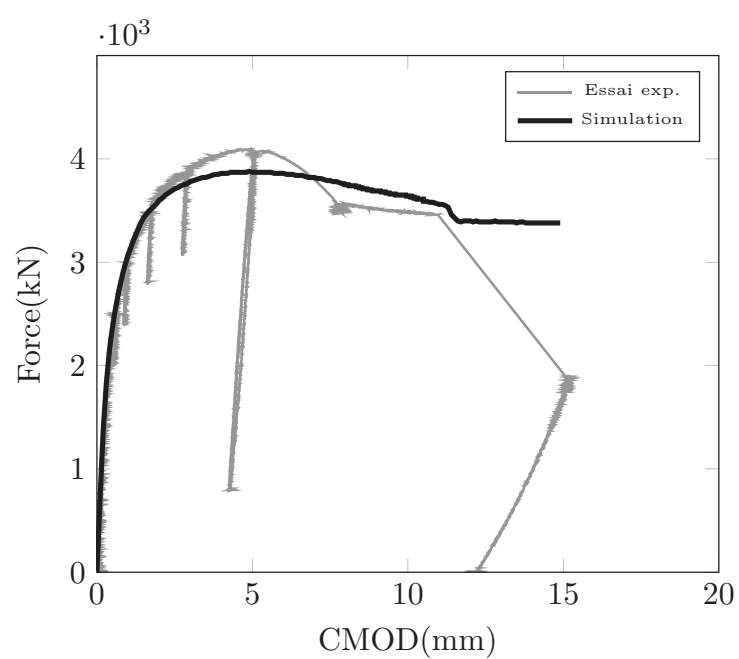


FIGURE 4.12 – Réponse globale force appliquée - ouverture de fissure au cours de la simulation en comparant avec l'essai expérimental

Conclusion et Perspectives

Le travail de thèse a porté sur des analyses analytiques et numériques des effets de la plasticité et du gradient du champ de contrainte sur l'initiation et la propagation de fissure cohésive. D'une part, à travers les calculs analytiques variationnels en prenant en compte la dissipation d'énergie par la plasticité et l'énergie surfacique de fissure cohésive, également des simulations numériques sur l'évolution de fissure au sein des structures élastoplastiques, on peut étudier le couplage entre la fissuration et la plasticité. D'autre part, on montre dans le manuscrit les effets particulièrement importants de la non-uniformité du champ de contrainte sur la nucléation de la fissure. En introduisant les longueurs caractéristiques associées au gradient de contrainte et au comportement du matériau, l'approche à deux échelles et l'analyse complexe sont mises en œuvre pour le but d'exprimer analytiquement les étapes d'évolution de fissure. On résume dans ce chapitre des résultats principaux et contributions originales de la thèse avant d'ouvrir les perspectives de travail possible.

Fissure cohésive couplée avec la plasticité

Le couplage entre la plasticité et la fissuration dans des études de rupture ductile est un enjeu essentiel dans l'industrie. La première partie de la thèse a pour but de contribuer une modélisation fiable de l'évolution de la fissure au sein des structure de comportement élastoplastique, d'étudier des effets associés de la triaxialité de contrainte, de la géométrie, de la déformation plastique et d'implémenter dans le code d'élément fini. Les deux critères de plasticité et d'amorçage cohésif en contrainte dans le cas unidimensionnel, puis le cas et tridimensionnel, sont mis en comparaison en utilisant l'approche variationnelle

- (i) **Barre 1D élastoplastique en traction** : les critères de plasticité et de cohésif sont donc caractérisés respectivement par les valeurs scalaires critiques σ_y et σ_c . En supposant que $\sigma_c > \sigma_y$, la réponse globale élastique de la barre est suivie de la phase élastoplastique lorsque la contrainte homogène dans la barre $F/S \geq \sigma_y$, puis la fissure cohésive s'initie dès que F/S atteint la valeur critique σ_c . Les équations d'équilibre, les critères de plasticité et de cohésif sont déduits à partir de la condition de stabilité locale d'énergie d'ordre 1. En utilisant la condition de stabilité locale d'énergie d'ordre 2, on a montré que la réponse globale au seuil cohésif est toujours instable si la force est imposée à l'extrémité de la barre. Néanmoins dans le cas du déplacement imposé, l'instabilité de la réponse globale de la barre dépend de l'effet d'échelle, *i.e.* le rapport entre la longueur de la barre L et une longueur critique L_c . En effet, si $L < L_c$ la réponse est stable et la fissure cohésive évolue progressivement, dans le cas contraire où $L \geq L_c$ la solution au seuil cohésif est

instable et la contrainte dans la barre chute brutalement. En plus, on a montré que cette longueur critique L_c dépend seulement du module Young du matériau et la densité d'énergie surfacique cohésive, mais pas du module d'écrouissage. La plasticité n'influence donc pas la stabilité de fissure cohésive dans le cas unidimensionnel.

- (ii) **Structure multidimensionnelle** : les formulations énergétiques sont généralisées dans le cas multidimensionnel. On met en comparaison les critères de plasticité et de cohésif étant les courbes dans le plan des contraintes de Mohr. La fissure cohésive s'initie dès que le cercle de Mohr du champ de contrainte est tangentielle à la courbe cohésive intrinsèque. En supposant que la dernière est une propriété intrinsèque du matériau qui ne dépend pas du champ de déformation élastoplastique, l'effet de triaxialité de contrainte sur l'amorçage de fissure apparaît évidemment. L'implémentation de la courbe cohésive intrinsèque dans les simulations numériques sur les structures multidimensionnelles nous permet d'identifier la position du site d'amorçage de fissure. Par ailleurs, on considère numériquement dans le chapitre 3 la propagation de fissure cohésive en mode mixte dans le cadre de la méthode de lagrangien augmenté. Les résultats utilisant la loi cohésive de type Talon-Curnier [Talon et Curnier, 2003] présentés dans [Lorentz, 2008] sont généralisés en mettant place deux contraintes critiques distinguées (σ_c, τ_c) .

Malgré des difficultés et limitations concernant l'étude analytique de stabilité locale d'énergie (d'ordre 2) de la solution multidimensionnelle et le chemin de la fissure, le modèle cohésif prenant en compte la plasticité présente de premiers résultats prometteurs dans certains cas particuliers. Ces résultats sont basés sur les formulations analytiques solides et peut être utilisés ultérieurement dans l'ingénierie. Le développement et l'implémentation du modèle cohésif en mode mixte de fissuration est présenté dans le chapitre 3. Le critère d'amorçage cohésif sous la forme une courbe cohésive intrinsèque des contrainte et les formulations énergétiques de lagrangien augmenté sont détaillés. Cette modélisation numérique généralise des travaux de [Lorentz, 2008]. Un cas d'application industriel sur une maquette de grandes dimensions est présenté et discuté dans le chapitre 4 de la thèse. On montre dans le dernier la capacité remarquable du modèle cohésif pour simuler un problème industriel complexe de manière satisfaisante.

Effets du gradient de contrainte

Une des contributions majeures du modèle cohésif est d'expliquer le phénomène de nucléation de la fissure en mode I au sein d'une structure saine. En effet, on a montré que la fissure peut être initiée avec un chargement fini. Une partie importante de la thèse est consacrée à l'étude des effets essentiels du gradient du champ de contrainte sur la nucléation de fissure, de l'initiation de fissure cohésive à l'apparition de fissure «macroscopique». Une vue panoramique et également détaillée analytiquement du problème de fissure au centre d'un milieu bidimensionnel infini élastique est présenté

- (i) **Fissure cohésive de type Dugdale** : en utilisant l'approche à deux échelles et l'analyse complexe dans le cadre de l'hypothèse cohésive de Dugdale, l'évolution de la fissure à partir de la structure saine est étudiée analytiquement, de la *branche élastique* à la *branche purement cohésive*, puis la *branche partiellement non-cohésive*. On a montré que la solution est progressive pendant les deux première branches mais discontinue dès que la zone non

cohésive apparaît au centre de fissure, ainsi la longueur de fissure saute brutalement du fait que la dernière branche contient un snap-back sous la forme d'une boucle. Cette boucle peut être observable et joue un rôle essentiel lors de l'étude de sensibilité à l'imperfection préexistante dans la structure. Par ailleurs, après le saut brutal de la longueur de la fissure, la taille de la zone cohésive devient très petite devant la longueur totale de fissure et la réponse globale de la structure fissurée tend asymptotiquement vers la solution classique de [Griffith, 1920]. La solution analytique est vérifiée par la simulation avec *Code_Aster*.

- (ii) **Fissure cohésive de type Barenblatt** : on prend en compte dans ce cas la variation de la force cohésive en fonction du saut normal de déplacement. Les procédures de calculs restent similaires à la fissure cohésive de type Dugdale, mais l'analyse complexe conduit à un système des équations intégral-différentielles dont la résolution analytique n'est pas disponible. Afin de s'affranchir cette difficulté, on présente dans la thèse la méthode semi-analytique utilisant le développement du saut de déplacement adimensionné en série des polynômes de Chebychev.

Au point de vue d'ingénieur, la non-uniformité du champ de contrainte est pertinente au sein de la structure suite au chargement, aux singularités géométriques ou à l'hétérogénéité du matériau. Le travail de thèse permet de modéliser de manière complète l'évolution de fissure contrôlée par cette non-uniformité. D'ailleurs, l'étude du saut brutal de longueur de la fissure dès que la zone non cohésive apparaît requiert des hypothèses supplémentaires concernant les effets d'inertie et la modélisation de fissuration dynamique.

Perspectives

Les perspectives pour les études des couplages entre le modèle de zone cohésive et d'autres phénomènes mécaniques sont nombreuses. Sur le plan analytique, on peut envisager d'utiliser l'approche à deux échelles et l'analyse complexe pour étudier l'évolution de fissure initiée au bord d'un domaine semi-infini sous les effets du gradient de contrainte. La transformation conforme devrait être mise en place. En supposant que la longueur de fissure reste beaucoup plus petite que les dimensions du domaine, les résultats concernant la fissure débouchante pourraient compléter le travail de la thèse pour considérer toutes les configurations de la nucléation de fissure en mode I au sein d'une structure bidimensionnelle élastique. On pourrait également généraliser les résultats de la thèse en prenant en compte l'inclinaison de la fissure lors de son évolution, *i.e.* la fissure est en mode mixte I-II. Dans ce problème, le critère cohésif en mode mixte étant la courbe cohésive intrinsèque dans le plan des contraintes devrait être utilisé. En conséquence, la longueur caractéristique associée au gradient du champ de contrainte contrôle non seulement la longueur mais également la direction de la fissure. On pourrait ainsi déduire un critère de changement de direction de fissure basant sur les propriétés du champ de contrainte.

Par ailleurs, il serait intéressant de modéliser le couplage fissuration cohésive-plasticité dans un cas multidimensionnel simplifié. L'existence en parallèle des zones de fissuration, de décharge élastique et d'élastoplastique au sein de la structure devrait être prise en compte. On pourrait envisager d'utiliser la méthode asymptotique raccordée en supposant que le champ de déforma-

tion plastique est régulier à travers ces différentes zones. Afin d'aborder ce problème, des calculs numériques approximatifs pourraient être nécessaires.

L'approche cohésive pourrait être comparée avec d'autres modèles de fissuration. D'une part, le modèle d'endommagement à gradient basé également sur l'approche variationnelle est souvent comparé avec le modèle de zone cohésive. La convergence d'un modèle à l'autre est établie grâce à la convergence énergétique (voir [Bourdin et al., 2008], [Lorentz et al., 2011]). L'utilisation alternative des deux modèles lors de la modélisation de fissuration pourrait nous fournir une méthode très avantageuse qui prendrait en compte le couplage plasticité-fissuration et le branchement de fissure. D'autre part, il serait intéressant de faire le lien entre le modèle phénoménologique de zone cohésive et l'approche micro-mécanique. En conséquence, les paramètres cohésifs, dont la courbe cohésive intrinsèque et la valeur critique du taux de restitution d'énergie, pourraient être modélisés à une échelle inférieure.

Sur le plan pratique, la modélisation de la déchirure ductile utilisant le modèle cohésif devrait être améliorée. D'une part, la technique d'identification de (σ_c, τ_c, G_c) à partir des essais expérimentaux sur des éprouvettes standardisées (AE, CT) devrait être développé systématiquement. D'autre part, l'existence de la zone de transition entre la fissure et la zone plastifiée «loin» de fissure devrait être prise en compte. Autrement dit, le couplage fissuration-plasticité devrait être modélisé numériquement par un mécanisme supplémentaire. Par ailleurs, le problème du changement et du branchement de fissure au cours de son évolution au sein d'un matériau élastoplastique reste ouvert. Les astuces numériques, dont la X-FEM, ou un critère mécanique basant sur le champ de contrainte pourraient être mis en œuvre.

Bibliographie

- [Abdelmoula et al., 2010] Abdelmoula, R., J.-J. Marigo, et T. Weller : 2010, ‘Construction and justification of Paris-like fatigue laws from Dugdale-type cohesive models’. *Annals of Solid and Structural Mechanics* **1**(3-4), 139–158.
- [Alessi et al., 2014] Alessi, R., J.-J. Marigo, et S. Vidoli : 2014, ‘Gradient damage models coupled with plasticity and nucleation of cohesive cracks’. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **214**(2), 575–615.
- [Alessi et al., 2015] Alessi, R., J.-J. Marigo, et S. Vidoli : 2015, ‘Gradient damage models coupled with plasticity : Variational formulation and main properties’. *Mechanics of Materials* **80**, 351–367.
- [Barenblatt, 1962] Barenblatt, G. : 1962, ‘The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture’. *Adv. Appl. Mech.* **7**, 55–129.
- [Beremin et al., 1983] Beremin, F., A. Pineau, F. Mudry, J.-C. Devaux, Y. D’Escatha, et P. Ledermann : 1983, ‘A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel’. *Metallurgical transactions A* **14**(11), 2277–2287.
- [Bordet et al., 2006] Bordet, S., B. Tanguy, J. Besson, S. Bugat, D. Moinereau, et A. Pineau : 2006, ‘Cleavage fracture of RPV steel following warm pre-stressing : micromechanical analysis and interpretation through a new model’. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* **29**(9-10), 799–816.
- [Bourdin et al., 2008] Bourdin, B., G. A. Francfort, et J.-J. Marigo : 2008, ‘The variational approach to fracture’. *J. Elasticity* **91**(1–3), 5–148.
- [Bui, 1978] Bui, H. D. : 1978, *Mécanique de la rupture fragile*. Masson.
- [Charlotte et al., 2008] Charlotte, M., P.-E. Dumouchel, et J.-J. Marigo : 2008, ‘Dynamic fracture : an example of convergence towards a discontinuous quasi-static solution’. **20**, 1–19.
- [Charlotte et al., 2000] Charlotte, M., G. A. Francfort, J.-J. Marigo, et L. Truskinovsky : 2000, ‘Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models’. In : A. Benallal (ed.) : *Continuous Damage and Fracture*, The data science library. Elsevier, pp. 7–18.
- [Charlotte et al., 2006] Charlotte, M., J. Laverne, et J.-J. Marigo : 2006, ‘Initiation of cracks with cohesive force models : a variational approach’. *Eur. J. Mech. A/Solids* **25**(4), 649–669.
- [Dang et al., 2014] Dang, T. B. T., L. Halpern, et J.-J. Marigo : 2014, ‘Asymptotic analysis of small defects near a singular point in anti-plane elasticity. Application to the nucleation of a crack at a notch’. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems* **2**(2), 141–179.

-
- [Dang et al., 2013] Dang, T. B. T., J.-J. Marigo, et L. Halpern : 2013, ‘Matching Asymptotic Method in Propagation of Cracks with Dugdale Model’. *Key Engineering Materials* **525-526**, 489–92.
- [Del Piero, 1999] Del Piero, G. : 1999, ‘One-Dimensional ductile-brittle transition, yielding and structured deformations’. in : P. Argoul, M. Frémond (Eds.), *Proceedings of IUTAM Symposium "Variations de domaines et frontières libres en mécanique"*, Paris, 1997, Kluwer Academic.
- [Dugdale, 1960] Dugdale, D. : 1960, ‘Yielding of steel sheets containing slits’. *J. Mech. Phys. Solids* **8**, 100–108.
- [Dumouchel et al., 2007] Dumouchel, P.-E., J.-J. Marigo, et M. Charlotte : 2007, ‘Rupture dynamique et fissuration quasi-statique instable’. *Comptes Rendus Mécanique* **335**(11), 708–713.
- [Einav et al., 2007] Einav, I., G. Houlsby, et G. Nguyen : 2007, ‘Coupled damage and plasticity models derived from energy and dissipation potentials’. *International Journal of Solids and Structures* **44**(7), 2487–2508.
- [Ferdjani et al., 2007] Ferdjani, H., R. Abdelmoula, et J.-J. Marigo : 2007, ‘Insensitivity to small defects of the rupture of materials governed by the Dugdale model’. *Continuum Mech. Thermodyn.* **19**(3-4), 191–210.
- [Ferdjani et al., 2009] Ferdjani, H., R. Abdelmoula, J. J. Marigo, et S. El Borgi : 2009, ‘Study of size effects in the Dugdale model through the case of a crack in a semi-infinite plane under anti-plane shear loading’. *Continuum Mech. Thermodyn.* **21**(1), 41–55.
- [Fouchal et al., 2009] Fouchal, F., F. Lebon, et I. Titeux : 2009, ‘Contribution to the modelling of interfaces in masonry construction’. *Construction and Building Materials* **23**(6), 2428–2441.
- [Francfort et Marigo, 1998] Francfort, G. et J. Marigo : 1998, ‘Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem’. *J. Mech. Phys. Solids* **46**(8), 1319–1342.
- [Gao et al., 1999] Gao, X., R. Dodds, R. Tregoning, J. Joyce, et R. Link : 1999, ‘A Weibull stress model to predict cleavage fracture in plates containing surface cracks’. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* **22**, 481–494.
- [Griffith, 1920] Griffith, A. : 1920, ‘The phenomena of rupture and flow in solids’. *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **CCXXI(A)**, 163–198.
- [Grisvard, 1985] Grisvard, P. : 1985, *Elliptic problems in non smooth domains*, No. 24 in Monographs and Studies in Mathematics. Pitman.
- [Gurson, 1977] Gurson, A. L. : 1977, ‘Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I—Yield criteria and flow rules for porous ductile media’. *Journal of engineering materials and technology* **99**(1), 2–15.
- [Han et Reddy, 2012] Han, W. et D. Reddy : 2012, *Plasticity : mathematical theory and numerical analysis*, Vol. 9. Springer Science & Business Media.
- [Hult et McClintock, 1956] Hult, J. et F. McClintock : 1956, ‘Elastic-plastic stress and strain distributions around sharp notches under repeated shear’. In : *Proc. 9th Int. Congress on Applied Mechanics*, Vol. 8. pp. 51–58.

Bibliographie

- [Jaubert et Marigo, 2006] Jaubert, A. et J.-J. Marigo : 2006, ‘Justification of Paris-type Fatigue Laws from Cohesive Forces Model via a Variational Approach’. *Continuum Mech. Thermodyn.* **V18**(1), 23–45.
- [Laverne et Marigo, 2004] Laverne, J. et J.-J. Marigo : 2004, ‘Approche globale, minima relatifs et Critère d’Amorçage en Mécanique de la Rupture’. *Comptes Rendus Mécanique* **332**(4), 313–318.
- [Lazzaroni et al., 2012] Lazzaroni, G., R. Bargellini, P.-E. Dumouchel, et J.-J. Marigo : 2012, ‘On the role of kinetic energy during unstable propagation in a heterogeneous peeling test’. *International Journal of Fracture* **175**, 127–150. Isiweb.
- [Lemaitre et Chaboche, 1994] Lemaitre, J. et J.-L. Chaboche : 1994, *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press.
- [Lorentz, 2008] Lorentz, E. : 2008, ‘A mixed interface finite element for cohesive models’. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **198**, 302–317.
- [Lorentz et al., 2011] Lorentz, E., S. Cuvilliez, et K. Kazymyrenko : 2011, ‘Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model’. *Comptes Rendus Mécanique* **339**(1), 20–26.
- [Lubliner, 2008] Lubliner, J. : 2008, *Plasticity theory*. Courier Corporation.
- [Marigo, 2010] Marigo, J.-J. : 2010, ‘Initiation of cracks in Griffith’s theory : an argument of continuity in favor of global minimization’. *Journal of Nonlinear Science* **20**(6), 831–868.
- [Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989] Mazars, J. et G. Pijaudier-Cabot : 1989, ‘Continuum damage theory-application to concrete’. *Journal of Engineering Mechanics* **115**(2), 345–365.
- [McClintock et Irwin, 1984] McClintock, F. et G. Irwin : 1984, ‘Plasticity Aspects of Fracture Mechanics in Fracture Toughness Testing and It’s Applications’. *ASTM STP* **381**, 84.
- [Monerie, 2000] Monerie, Y. : 2000, ‘Fissuration des matériaux composites : rôle de l’interface fibre/matrice’.
- [Monerie et Acary, 2001] Monerie, Y. et V. Acary : 2001, ‘Formulation dynamique d’un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement et frottement.’. *Revue européenne des éléments finis* **10**(02-03-04), 489–503.
- [Muskhelishvili, 1963] Muskhelishvili, N. I. : 1963, *Some basic problems of mathematical theory of elasticity*. P. Noordhoff Ltd, Groningen.
- [Needleman et Tvergaard, 1984] Needleman, A. et V. Tvergaard : 1984, ‘Analysis of ductile rupture in notched bars’. *J. Mech. Phys. Solids* **32**, 461–490.
- [Nguyen, 2000] Nguyen, Q. S. : 2000, *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley and Son, London.
- [Raous et Monerie, 2002] Raous, M. et Y. Monerie : 2002, ‘Unilateral contact, friction and adhesion : 3D cracks in composite materials’. pp. 333–346.
- [Rice et Rosengren, 1968] Rice, J. et G. Rosengren : 1968, ‘Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **16**(1), 1–12.

- [Roirand et al., 2014] Roirand, Q., D. Moinereau, P. Le Delliou, C. Sonnefraud, W. Vincent, et C. Cossange : 2014, ‘Mastère CoMaDiS. Analyse de la déchirure ductile d’une tuyauterie en acier ferritique soumise à un essai de flexion 4 points, H-T24-2014-00107-FR’.
- [Rousselier, 1986] Rousselier, G. : 1986, ‘Les modèles de rupture ductile et leurs possibilités actuelles dans le cadre de l’approche locale de la rupture’. In : *Int. Seminar on Local Approach of Fracture, Moret-Sur-Loing, France*. pp. 257–284.
- [Simo et Hughes, 2006] Simo, J. C. et T. J. Hughes : 2006, *Computational inelasticity*, Vol. 7. Springer Science & Business Media.
- [Talon et Curnier, 2003] Talon, C. et A. Curnier : 2003, ‘A model of adhesion coupled to contact and friction’. *Eur. J. Mech. A/Solids* **22** (4), 545–565.

Résumé : L'objectif de cette thèse est d'étudier l'évolution de la fissure sous les effets de plasticité et du champ de contrainte non-uniforme à l'aide du modèle de zone cohésive. Dans un premier temps, l'évolution de la fissure au sein du matériau élastoplastique est explorée dans le cadre de l'approche variationnelle. Les solutions sont explicitées dans le cas d'une barre 1D sous traction simple grâce aux conditions de stabilité locale d'énergie au premier ordre et au second ordre. Cette étude nous permet de mettre en lumière l'effet de la plasticité sur le comportement adoucissant du matériau dès que la fissure cohésive apparaît. En effet, la réponse globale de la barre sous déplacement imposé est stable seulement si la longueur de la barre est inférieure à une longueur critique. Cette dernière est démontrée indépendante du module d'écrouissage plastique mais dépend du module Young et de la dérivée seconde de la densité d'énergie de fissure. Les formulations énergétiques peuvent être généralisées pour la structure 3D. Dans ce cas, les critères de plasticité et de cohésif deviennent les courbes dans le plan des contraintes de Mohr. La comparaison des courbes nous permet d'étudier la nucléation de fissure cohésive au sein du domaine plastifié. Dans un deuxième temps, les effets de la non-uniformité du champ de contrainte sur la nucléation de la fissure au sein de la structure élastique sont mis en évidence. On construit la solution analytique en utilisant la technique à deux échelles et l'analyse complexe. L'évolution de la fissure purement cohésive et partiellement non-cohésive est contrôlée par le gradient du champ de contrainte lié à une longueur caractéristique. L'utilisation des différentes lois cohésives dans le problème est explorée. La sensibilité de la solution à la taille du défaut préexistant est également étudiée. Finalement, des résultats analytiques sont validés par les simulations numériques et le modèle de zone cohésive en mode mixte est implémenté dans *Code_Aster*.

Mots clés : modèle de zone cohésive, plasticité, gradient de contrainte, approche variationnelle, approche à deux échelles, analyse complexe

Abstract: The aim of this work is to study the crack evolution under plasticity and non-uniform stress field effects by using cohesive zone model. Firstly, based on the variational approach, the crack evolution in the elastoplastic material is investigated. The solutions for 1D beam under simple tension loads are explicitly expressed through the first and the second order's stability conditions of energy. This study shows that the plasticity effects on the material softening behavior start as soon as the crack appears. In fact, the global solution of the beam under described displacement is stable only if the beam length is lower than a characteristic length. This length is independent of plasticity's hardening module but it depends on Young modulus and on the second derivative of crack energy density. The energy formulations can be generalized for 3D structure. In this case, the plasticity and cohesive criteria become two curves in Mohr's stresses plane. The comparison between these curves allows to consider the crack nucleation in the plastified domain. Secondly, the non-uniform stress field effects on the crack nucleation in the elastic material are highlighted. The analytical solution is established by using two-scale technique and complex analysis. The evolution of fully cohesive crack and partially non-cohesive crack is controlled by the stress gradient, which is related to a characteristic length. Different cohesive laws are used in this study. The sensitivity of solution to pre-existing imperfection size is also explored. Finally, analytical results are validated by numerical simulations and the cohesive zone model in mixed mode is implemented in *Code_Aster*.

Key words: cohesive zone model, plasticity, stress gradient, variational approach, two scales technique, complex analysis